

Statika

Kinematika

Dinamika - dinamika tačke i dinamika sistema krutih tela

# МЕХАНИКА

dr Rade Đukić prof VTŠ

Mehanika II - 01 - 1/59

# МЕХАНИКА

2

□ **МЕХАНИКА  
ЉВРСТОГ ТЕЛА**

□ **Mehanika krutog  
tela**

□ **Mehanika  
deformabilnog tela**

□ **МЕХАНИКА  
ФЛУИДА**

□ **Mehanika tečnosti**

□ Hidrostatika i

□ hidrodinamika

□ **Mehanika gasova**

□ aerostatika

□ aerodinamika

Mehanika II - 01 - 2/59

# Mehanika čvrstog tela

3

## KRUTOG TELA

- Statika
- Kinematika
- Dinamika

## DEFORMABILNOG TELA

- Nauka o čvrstoći otpornost materijala
- Teorija elastičnosti
- Teorija plastičnosti
- Mehanika koontinuuma

Mehanika II - 01 - 3/59

# VELIČINE U MEHANICI

4

- **SKALARI** tenzori nultog reda ( $3^0$  jedan podatak + merna jedinica)
- **VEKTORI** tenzori prvog reda ( $3^1 = 3$  podatka + merna jedinica)
- **TENZORI II** tenzori drugog reda ( $3^2 = 9$  podatak + merna jedinica)
- **TENZORI IV** tenzori četvrtog reda ( $3^4 = 81$  podatak + merna jedinica)

# SKALARI

5

- |                                |                                   |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. Dužina $l$ (m)              | 7. Ugao (rad)                     |
| 2. Masa $m$ (kg)               | 8. Temperatura $t$ (K)            |
| 3. Vreme $t$ (s)               | 9. Rad $A$ ( $J = Nm$ )           |
| 4. Površina $A$ ( $m^2$ )      | 10. Snaga $P$ ( $W = Nm/s$ )      |
| 5. Zapremina $V$ ( $m^3$ )     | 11. Energija $E$ ( $J = Nm$ )     |
| 6. Gustina $\rho$ ( $kg/m^3$ ) | 12. Pritisak $p$ ( $Pa = N/m^2$ ) |

Mehanika II - 01 - 5/59

# VEKTORI

6

- |                      |                       |             |
|----------------------|-----------------------|-------------|
| 1. Vektor položaja   | $\vec{r}$             | (m)         |
| 2. Vektor pomeranja  | $\vec{s}$             | (m)         |
| 3. Brzina            | $\vec{v}$             | (m/s)       |
| 4. Ubrzanje          | $\vec{a}$             | ( $m/s^2$ ) |
| 5. Količina kretanja | $\vec{K} = m \vec{v}$ | (kg m/s)    |

Mehanika II - 01 - 6/59

# VEKTORI

7

6. Sila  $\vec{F} = m \vec{a}$  (kgm/s<sup>2</sup>=N)

7. Statički moment sile za tačku  
 $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$  (N m)

8. Moment količine kretanja  
 $\vec{L}_O = \vec{r} \times m \cdot \vec{v}$  (Nms)

9. Impuls sile  
 $\vec{I} = \vec{F} \cdot t$  (Ns)

Zadatak i značaj kinematike  
Kretanje i mirovanje,  
Prostor i vreme  
Referentno telo,  
Tačka,  
kruto telo,  
Vremenski interval

## UVOD

## Kinematika

- Kinematika je deo klasične mehanike koji se bavi **problemima kretanja** zanemarujući pri tom izučavanju dimenzije i mehaničke i fizičke osobine tela i prostora u kome se telo kreće
- Bavi se izučavanjem geometrije kretanja
- Povezuje **položaj** tela sa **vremenom**

dr R Đukić

**Mehanika II - 01 - 9/59**

## Zadaci kinematike

- Utvrđivanje osnovnih pojmova mehanike
- Položaj u prostoru i definisanje prostora
- Brzina kretanja, sopstvena brzina, prenosna brzina
- Ubrzanje – normalno, tangencijalno, Koriolisovo
- Ugao okretanja, ugaona brzina i ugaono ubrzanje
- Put
- Utvrđivanje matematičkih zavisnosti odgovarajućih mehaničkih parametara

dr R Đukić

**Mehanika II - 01 - 10/52**

- Kinematika predstavlja uvod u dinamiku koja pored kretanja, proučava i sile koje izazivaju kretanje konkretnih materijalnih tela sa svim svojim mehaničko- fizičkim osobinama

**Mehanika II - 01 - 11/52**

- Bavi se proučavanjem geometrije kretanja
- Sve kinematičke veličine izvedene su na osnovu geometrijskih odnosa koje važe za prostor u kome se kretanje odvija

## Značaj kinematike

- Ima velikog značaja za rešavanje praktičnih problema u različitim oblastima
- U mašinstvu pri proučavanju kretanja mehanizama mašina
- Kao polaz u dinamici pri proučavanju dinamike komponenata mašina
- U dinamici vozila i dinamici putne mreže

**Mehanika II - 01 - 13/59**

## Materijalno telo

- Pod materijalnim telom podrazumeva se ograničeni prostor ispunjen materijom

Glavne osobine materijalnog tela su

- oblik
- Zapremina i
- **POLOŽAJ**

**Mehanika II - 01 - 14/59**

## Kretanje

- Tela u prirodi koja nas okružuju u jednom datom trenutku imaju jedan međusobni odnos i raspored, odnosno odgovarajuće položaje.
- U nekom drugom trenutku taj raspored i položaji se mogu promeniti

## Kretanje

- Položaj nekog tela koje posmatramo definišemo u odnosu na posmatrača.
  - Položaj automobila na putu u odnosu na najbliže mesto na tom putu
  - Položaj klatna zidnog sata u odnosu na vertikalni pravac
  - Položaj aviona u odnosu na zemlje koje nadleće



## Kretanje

- Tela menjaju međusobni položaj.
- **Promena položaja** se zove kretanje.
- Kretanje se događa u **vremenu** koje neprestano teče
- Kretanje se odvija u **prostoru**

## Vreme

- Vreme je nezavisno promenljiva veličina **kada se proučavaju brzine daleko manje od brzine svetlosti**
- Veličina na koju nema uticaj izučavanje problema
- Proučavanje problema kretanja tela klasične mehanike se svodi na utvrđivanje zakona promene određenih mehaničkih veličina u toku vremena

$$\text{brzina svetlosti } c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

- Prostor koji nas okružuje naziva se u matematici i mehanici Euklidov prostor
- Osnovna karakteristika Euklidovog prostora je u tome da se bilo koje dve tačke tog prostora mogu spojiti pravom linijom, a njihovo najkraće rastojanje je duž.
- Matematički rečeno, kriva Euklidovog prostora je jednaka nuli

- Posmatrač iz jedne tačke prostora vidi tačke tog prostora duž zrakova koji su pravi
- Otuda su i vektori koji definišu položaje tačaka i tela koje se kreću u odnosu na posmatrača pravi
- Matematički aparat koji se pri koristi proučavanju kinematike kretanja su uglavnom vektori

## Vreme kao nezavisno promenljiva

- Vreme je nezavisna stalno rastuća pozitivna promenljiva
- Početni trenutak – vremenski trenutak kad počinje posmatranje kretanja
- Obično se obeležava sa  $t_0$  i najčešće se uzima da je  $t_0=0$ .

## Početni trenutak

- Početni trenutak – vremenski trenutak kad počinje posmatranje kretanja
- Proces se izučava u nekom vremenskom intervalu, to jest vreme od dva uzastopna posmatranja problema
- Vreme je pozitivno rastuća veličina
- Uvek je  $t > 0$ .

## Interval vremena

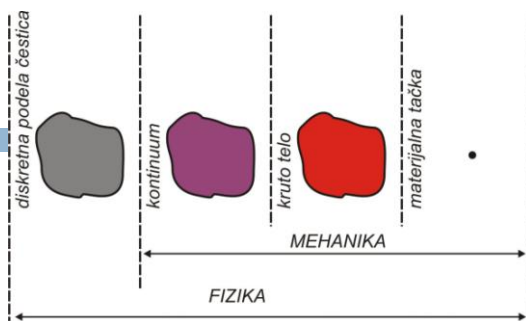
- Interval vremena je vremenski razmak između dva trenutka vremena

$$\Delta t = t_2 - t_1 > 0$$

## Interval kretanja

- U pojedinim slučajevima, kretanje se odvija samo u određenom vremenskom intervalu, posle čega prestaje
- Pod vremenskim intervalom kretanja podrazumeva se skup argumenta  $t$ 
$$\Delta t \in [0, t^*]$$
- Gde je  $t^*$  vremenski trenutak kada prestaje proučavanje kretanja

## 25 Tačka



- Tačka u kinematičkom smislu je geometrijska tačka koja menja položaj u prostoru u toku vremena u odnosu na posmatrano telo
- Tačka može biti uočena tačka nekog tela ili telo manjih dimenzija

dr R Đukić

**Mehanika II - 01 - 25/59**

26

## Telo

- Pod telom u kinematici podrazumeva se geometrijski objekat koji se kreće
- U okviru ovog kursa proučava se samo **apsolutno kruto telo** (telo kod koga se ne menja rastojanje između njegovih tačaka)

dr R Đukić

**Mehanika II - 01 - 26/52**

## Nepokretno telo

- Nepokretno telo je telo koje se u problemu izučavanja smatra nepokretnim
- Sva kretanja su relativna i u odnosu na posmatrani problem neko telo smatramo nepokretnim

## Referentno telo

- U okviru rešavanja problema uzimamo neko telo u odnosu na koje izučavamo kretanje
- Kada se objekat izučavanja i telo kreću zajedno a objekat dodatno u odnosu na telo, referentno telo smatramo nepokretnim (putnik u avionu, putnik na brodu, vozu, klip motora u odnosu na karoseriju)

Pojam kinematičke tačke  
Određivanje položaja tačke u prostoru

# *KINEMATIKA TAČKE*

dr R Đukić

Mehanika II - 01 - 29/59

30

## Položaj tačke u prostoru

- Mehaničko kretanje predstavlja promenu položaja tela u prostoru
- Promena se može uočiti i definisati samo u odnosu na neko drugo referentno telo

dr R Đukić

Mehanika II - 01 - 30/59

## Tačka

- U kinematici se posmatra geometrijska tačka (bez dimenzija) koja menja svoj položaj u odnosu na uočeno referentno telo
- Tačka menja svoj položaj u toku vremena  $t_0$  početni trenutak ( $t_0=0$ ) i  $t^*$  krajnji trenutak

## Položaj tačke

- Za utvrđivanje položaja tačke u odnosu na referentno telo treba definisati sistem registrovanja
- Radi preciznog jednoznačnog definisanja pozicije tačke usvajaju se odgovarajući koordinatni sistemi



## Primer automobila na putu

- Kao referentno telo uzima se mesto polaska
- Kao koordinatni sistem uzima se prirodni koordinatni sistem - trasa puta između polaznog i ciljnog odredišta
- Koordinata – položaj, udaljenje vozila od mesta polaska

## Mehanizam unutar automobila

- Izučavanje rada nekog mehanizma
- U ovom postupku automobil se može smatrati apsolutno nepokretnim
- Pri proučavanju rada tog mehanizma na autu nebitno je da li se auto kreće ili ne (izučavanje rada podizača stakla, položaja upravljača u odnosu na sedište i karoseriju, vidno polje, ECE 14, 18)

## Primer grada na mapi

- Definisana je geografska širina
- Definisana je geografska dužina i
- Definisana je nadmorska visina

Primeri geografskih karata ali i praćenje pozicije na karti preko satelitskog merenja (geostacionarni sateliti)

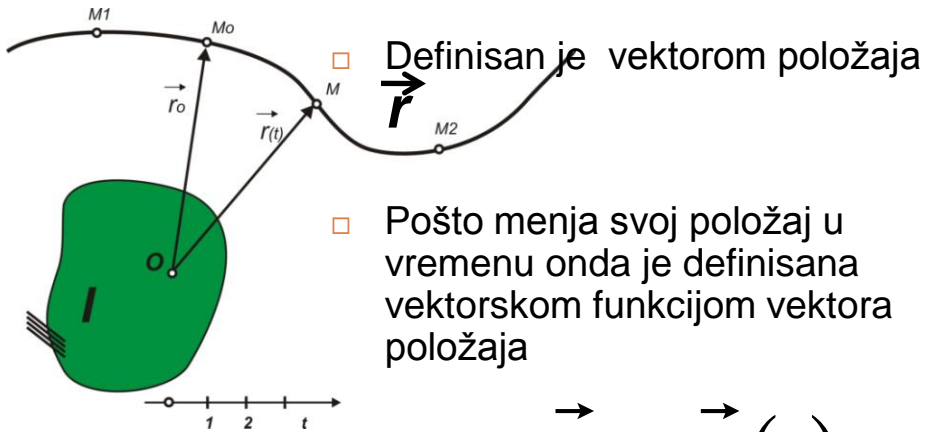
Praćenje radarom aviona i brodova

Mehaničko kretanje predstavlja promenu položaja tela u prostoru

Promena se može uočiti i definisati samo u odnosu na neko drugo referentno telo

## ODREĐIVANJE POLOŽAJA POKRETNE TAČKE U PROSTORU

## Položaj tačke M



$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

dr R Đukić

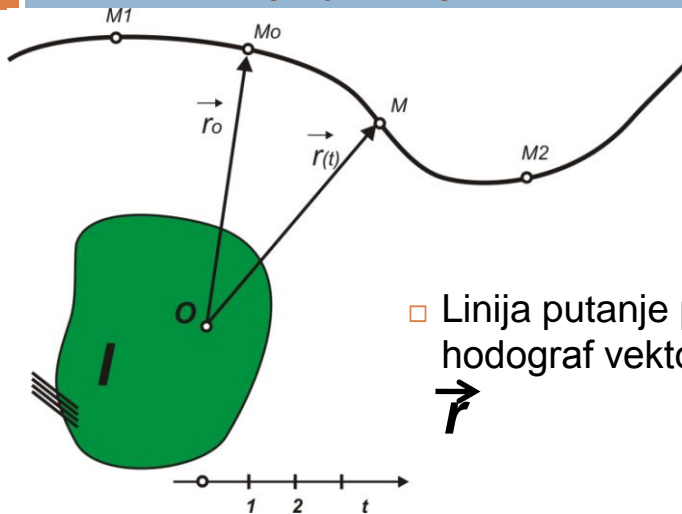
## Linija putanje

- U nekom trenutku tačka M je u položaju  $M_0$  koji je definisan sa  $\vec{r}_0$
- U drugom trenutku će biti u položaju  $M_1$  koji je definisan sa  $\vec{r}_1$
- Pri promeni položaja, tačka koja se kreće opisuje liniju koja se naziva **linijom putanje**

dr R Đukić

## Linija putanje

39



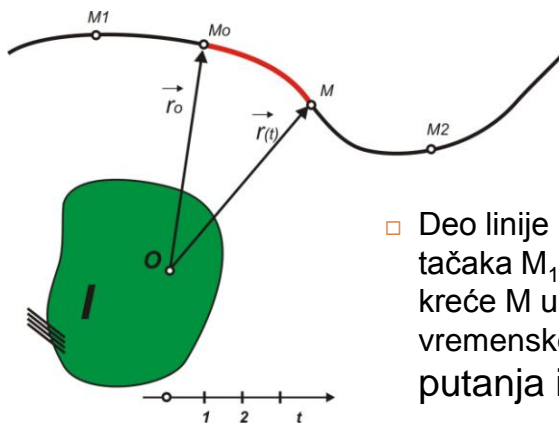
- Linija putanje predstavlja hodograf vektora položaja



dr R Đukić

## Putanja - trajektorija

40



- Deo linije putanje između tačaka  $M_1$  i  $M_2$  u kojima se kreće  $M$  u određenom vremenskom intervalu zove se putanja ili trajektorija

## Kordinatni sistemi:

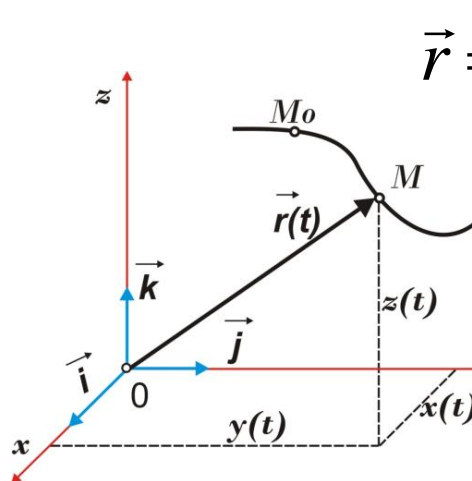
- **Dekartov pravougli koordinatni sistem**
- Polarno cilindrični koordinatni sistem
- Sferni koordinatni sistem
- **Prirodni koordinatni sistem**
- Opšti krivolinijski generalisani sistem (nije predmet ovih izlaganja)

dr R Đukić

Mehanika II - 01 - 41/59

## Mehanika II - 01 - 42/59

## Dekartov pravougli koordinatni sistem

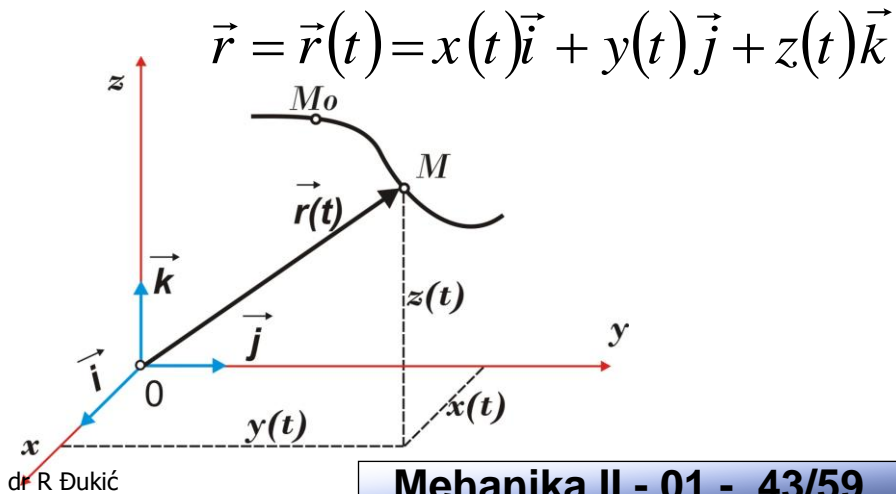


$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Vektori

$$\vec{i} \quad \vec{j} \quad \vec{k}$$

su jedinični  
vektori osa x, y, z



## Vektorska funkcija

- Vektorskoj funkciji

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

- Odgovaraju tri skalarne funkcije

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

## Zakon – jednačine kretanja

45

- Skalarnе funkcije zavisnosti koordinate od vremena nazivaju se zakonima kretanja ili jednačinama kretanja u Dekartovim koordinatama

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

dr R Đukić

**Mehanika II - 01 - 45/59**

## Linija putanje

46

- Eliminacijom parametra  $t$  iz prve dve jednačine

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

- Dobijaju se jednačine

$$f_1(x, y) = 0$$

$$f_2(y, z) = 0$$

- One predstavljaju cilindrične površi paralelne osama  $z$  i  $x$  čiji presek daje liniju putanje

**Mehanika II - 01 - 46/59**

## Linija putanje

- Eliminacijom parametra  $t$  iz sve tri jednačine

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

- Dobijaju se jednačine

$$F_1(x, y, z) = 0$$

$$F_2(x, y, z) = 0$$

- One predstavljaju cilindrične površi čiji presek daje liniju putanje

## Primer linije putanje u ravni

- Date su jednačine kretanja

$$x = 4t - 2t^2$$

$$y = 3t - 1.5t^2$$

$$x = 2(2t - t^2) \rightarrow \frac{x}{2} = (2t - t^2)$$

$$y = \frac{3}{2}(2t - t^2) \rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{2}$$



Primer linije putanje u ravni

49

- Transformacijom jednačina

$$x = 2(2t - t^2) \rightarrow \frac{x}{2} = (2t - t^2)$$

$$y = \frac{3}{2}(2t - t^2) \rightarrow y = \frac{3}{2} \cdot \frac{x}{2} \qquad y = \frac{3}{4}x$$

- Vidi se da je

$3x - 4y = 0$  jednačina poluprave t je uvek pozitivno

dr R Đukić

$$x \leq 2, y \leq 1.5$$

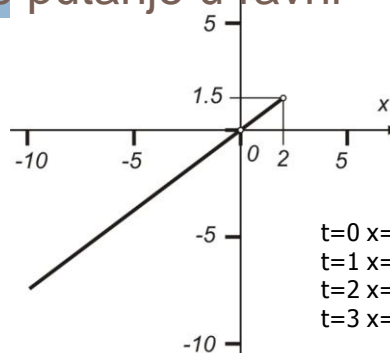
Primer linije putanje u ravni

50

- Dobijeni izraz

$$y = \frac{3}{4}x$$

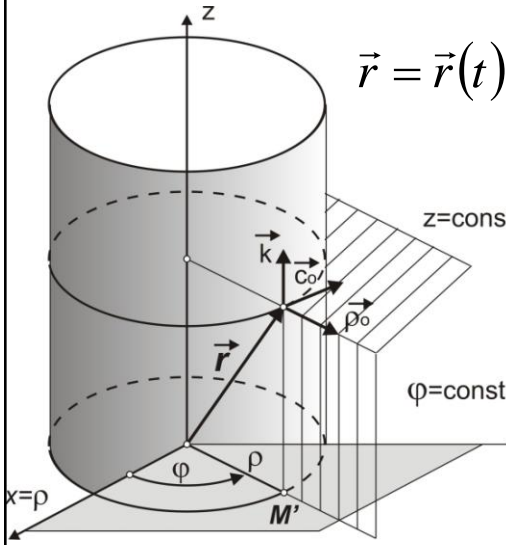
$$3x - 4y = 0$$



t=0 x=0,y=0;  
t=1 x=2, y=1,5;  
t=2 x=0,y=0;  
t=3 x=-6,y=-4.5

- je jednačina linije putanje za datu zavisnost promene položaja tačke u ravni

Polarno cilindrični koordinatni sistem



$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \rho(t)\vec{\rho}_o(t) + z(t)\vec{k}$$

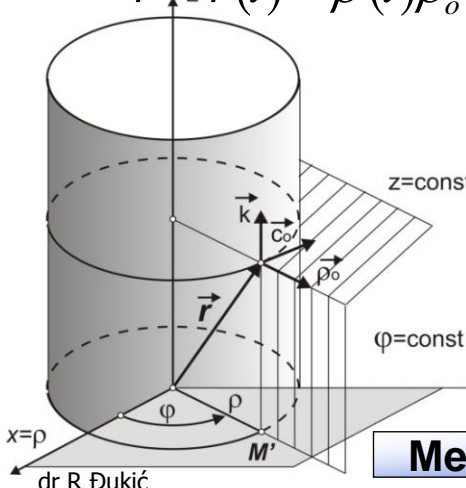
- Vektor položaja izražen u polarno cilindričnim koordinatama

- Jedinični vektori

$$\vec{\rho}_o, \vec{c}_o, \vec{k}$$

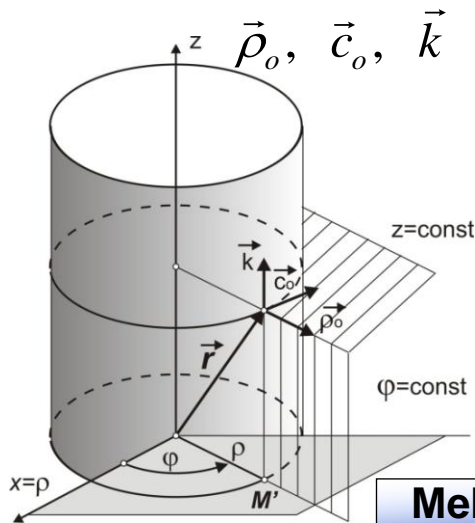
Polarno cilindrični koordinatni sistem

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \rho(t)\vec{\rho}_o(t) + z(t)\vec{k}$$



- Površi  $\varphi = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  i  $\rho = \text{const}$  nazivaju se koordinatne površi
- dve ravne  $\varphi = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$  i jedna cilindrična  $\rho = \text{const}$
- U preseku dve površi dobija se koordinatna linija kroz posmatranu tačku

## Polarno cilindrični koordinatni sistem



- Tačka M u preseku koordinatnih linija
- U pravcu tangenti na koordinatne linije postavljeni su jedinični vektori
- Jedinični vektori su međusobno upravni u posmatranoj tački M
- Radijalni, cirkularni i aksijalni pravac

**Mehanika II - 01 - 53/59**

## Zavisnost koordinata $x, y, z$ i $\rho, \varphi, z$

$$x = \rho \cos \varphi$$

$$y = \rho \sin \varphi$$

$$z = z$$

- Za isti koordinatni početak Dekartovog i polarno cilindričnog koordinatnog sistema
- vektor položaja za poznate polarno cilindrične koordinate koordinate Dekartovog koordinatnog dobijaju se

## Prirodni koordinatni sistem

55

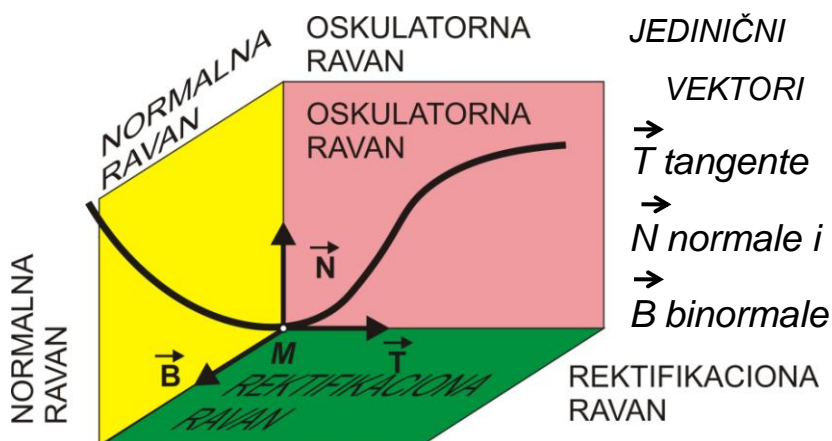
- Prirodni koordinatni sistem se definiše ako je poznata **linija putanje** odnosno hodograf vektora položaja tačke M
- U tom slučaju položaj tačke M u potpunosti je određen lučnom koordinatom **S**
- Na poznatoj putanji usvoji se početna tačka i smer porasta i tada je lučnom koordinatom s definisan trenutni položaj tačke M

dr R Đukić

Mehanika II - 01 - 55/59

## Prirodni koordinatni sistem

56



dr R Đukić

Mehanika II - 01 - 56/59

## Prirodni koordinatni sistem

57

- Ravan upravna na  $\vec{T}$  je glavna normalna ravan (sadrži jedinične vektore  $\vec{N}$  i  $\vec{B}$ )
- Ravan upravna na  $\vec{B}$  je oskulatorna ravan (sadrži jedinične vektore  $\vec{T}$  i  $\vec{N}$ )
- Ravan normalna na ort glavne normale  $\vec{N}$  (usmeren ka središtu krivine) je rektifikaciona ravan (jed. vektori  $\vec{T}$  i  $\vec{B}$ )

dr R Đukić

Mehanika II - 01 - 57/59

## Prirodni koordinatni sistem

58

- Vektori  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$  i  $\vec{B}$  obrazuju prirodni trijedar vektora
- Očigledno je da kod prostorne krive linije putanje, ovi vektori menjaju svoj pravac od tačke do tačke krive
- Pošto je položaj tačke jednoznačno određen prirodnim lučnom merom udaljenosti od početne tačke zakon kretanja je

$$S=S(t)$$

dr R Đukić

Mehanika II - 01 - 58/59

## Promenljivost/konstantnost jediničnih vektora

- jedinični vektor Dekartovog koordinatnog sistema koji su nepromenljivi tokom vremena. (koordinatni početak vezan za referentno telo)
- Jedinični vektori kod polarno cilindričnog i prirodnog koordinatnog sistema su promenljivi u toku vremena (koordinatni početak vezan za posmatrano telo)