Vertikalni hitac i slobodni pad u bezvazdušnom prostoru

Vertikalni hitac i slobodni pad u vazduhu

Pravolinijsko kretanje tačke

Prvi zakon

Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili relativnog pravolinijskog kretanja dok pod dejstvom sila ne bude primorano da to stanje promeni

Drugi zakon – osnovna jednačina dinamike

- **Promena kretanja proporcionalna je sili koja dejstvuje i vrši se u pravcu sile**

$$\vec{F} = m \cdot lim \frac{\vec{V}-\vec{V}_0}{t-t_0} = m \cdot \vec{a}$$

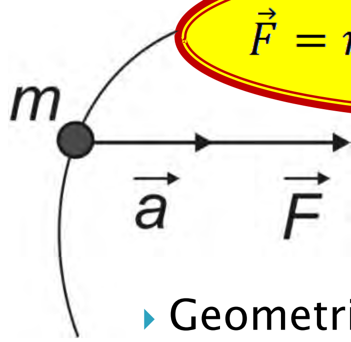
Odnosi se na materijalnu tačku i središte – težište sistema

Materijalna tačka

- U dinamici se pod materijalnom tačkom podrazumeva telo kod koga se pri proučavanju kretanja njegove dimenzije mogu zanemariti

Osnovna jednačina dinamike

$$\vec{F} = m \cdot lim \frac{\vec{V}-\vec{V}_0}{t-t_0} = m \cdot \vec{a}$$



- Geometrijski posmatrano, jednačina pokazuje da su sila i ubrzanje kolinearni vektori

Masa

$$\vec{F} = m \cdot lim \frac{\vec{V}-\vec{V}_0}{t-t_0} = m \cdot \vec{a}$$

- Masa je pozitivna skalarna veličina koja je karakteristika tela i ona je u klasičnoj dinamici konstantna
- Matematički posmatrano masa je *koeficijent proporcionalnosti* između sile i ubrzanja
- Masa je *mera inertnosti* tela

Masa

$$\vec{G} = m\,\vec{g}$$

- Sva tela na površini Zemlje pri slobodnom padanju imaju ubrzanje

$$g = 9.81\ \frac{m}{s^2}$$

- Merenjem težine – sile može se odrediti masa

$$m = \frac{G}{g}$$

Jedinica za silu

$$1\ [N] = 1\ [kgm/s^2\ ]$$

- Jedinica za dužinu m
- Jedinica za vreme s
- Jedinica za masu kg
- Jedinica za silu je Njutn [N]
- Sila od jednog 1 N je sila koja masi od 1 kg daje ubrzanje od 1 m/s^2
- Primena Međunarodnog SI sistema mera je zakonska obaveza u našoj zemlji

Masa i težina – dva pojma

- Težina je sila kojom zemlja privlači telo
- Masa je karakteristika tela, postoji i u beztežinskom stanju (kada je težina jednaka nuli)

Diferencijalna jednačina kretanja tačke

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

- Ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja tačke napisanu u vektorskom obliku
- To je diferencijalna jednačina drugog reda, u kojoj je nezavisno promenljiva t, a zavisno promenljiva vektor položaja
- Za kretanje u prostoru ova vektorska jednačina može da se napiše kao tri skalarne jednačine

Vektorska diferencijalna jednačina

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}}$$

- Vektorska diferencijalna jednačina u Dekartovom koordinatnom sistemu prevodi se u tri skalarne diferencijalne jednačine

$$m\ddot{x} = X$$

$$m\ddot{y} = Y$$

$$m\ddot{z} = Z$$

Diferencijalne jednačine

$$\boxed{m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F_i}}$$

- Kada se radi o rezultujućoj sili, kao zbiru komponenata, vektorska diferencijalna jednačina se prevodi u skalarne

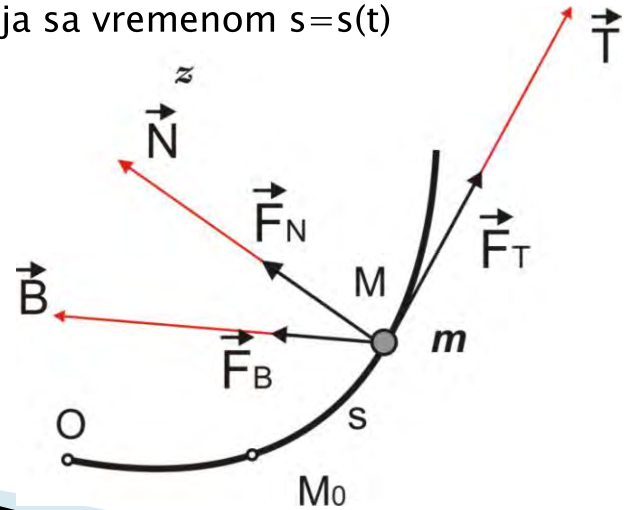
$$m\ddot{x} = \sum X_i$$

$$m\ddot{y} = \sum Y_i$$

$$m\ddot{z} = \sum Z_i$$

Prirodni koordinatni sistem

- Položaj tačke određen je lučnom koordinatom koja se menja sa vremenom s=s(t)



Prirodni koordinatni sistem

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

- Vektorska diferencijalna jednačina se prevodi u tri skalarne diferencijalne jednačine koje su funkcije vremena

$$m\,a_T = F_T$$
$$m\,a_N = F_N$$
$$m\,a_B = F_B$$

Prirodni koordinatni sistem

- Pošto ubrzanja u prirodnom koordinatnom sistemu zavise od lučne koordinate i brzine, to poznati izrazi za ubrzanja glase

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$a_N = \frac{V^2}{R_K} = \frac{\dot{s}^2}{R_K}$$

$$a_B = 0$$

Prirodni koordinatni sistem

- Dobijaju se projekcije sile na pravce tangente i normale. Podsetnik: prirodni koordinatni sistem se menja u zavisnosti od putanje tačke !

$$m\,\ddot{s} = F_T$$

$$m\,\frac{\dot{s}^2}{R_K} = F_N$$

$$F_B = 0$$

Prirodni koordinatni sistem

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

- Kada se radi o rezultujućoj sili kao zbiru komponenata vektorska diferencijalna jednačina se prevodi u skalarne

$$m\,\ddot{s} = \sum F_{iT}$$

$$m\frac{V^2}{R_K} = \sum F_{iN}$$

$$\sum F_{iB} = 0$$

1. Poznat vektor položaja – odrediti silu

- Ako je poznata masa m i funkcija promene vektora položaja u zavisnosti od vremena

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

odrediti rezultujuću silu : $\vec{F} = m\,\ddot{\vec{r}}$

- Na osnovu poznatih zakona kretanja dvostrukim diferenciranjem po vremenu i zamenom u odgovarajućim diferencijalnim jednačinama dobijaju se projekcije rezultujuće sile na koordinatne ose

2. Poznata sila – odrediti kretanje tačke

- Ako je poznata sila F odnosno njene projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema X,Y,Z – odrediti kretanje tačke
- To podrazumeva da diferencijalne jednačine drugog reda sa poznatim projekcijama treba dva puta integraliti i tako se dobijaju koordinate tačke

$$m\ddot{x} = X$$

$$m\ddot{y} = Y$$

$$m\ddot{z} = Z$$

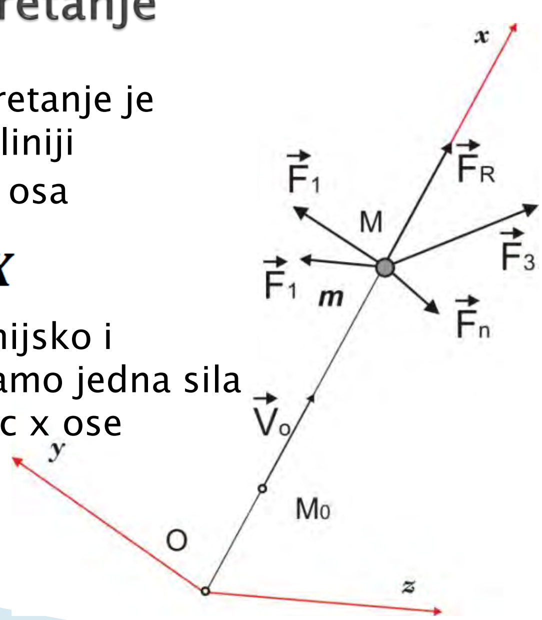
Pravolinijsko kretanje

- Najjednostavnije kretanje je kretanje po pravoj liniji
- Pravac kretanja – x osa

$$m\ddot{x} = X$$

- Kretanje je pravolinijsko i rezultanta sila ili samo jedna sila moraju imati pravac x ose

$$Y = 0, \quad Z = 0$$



Sila koja uslovljava pravolinijsko kretanje tačke može

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}$$

- Biti konstantna

  Vertikalni hitac i slobodni pad u bezvazdušnom prostoru

- Da zavisi samo od vremena

- Da zavisi samo od rastojanja

  Padanje tela sa velike visine

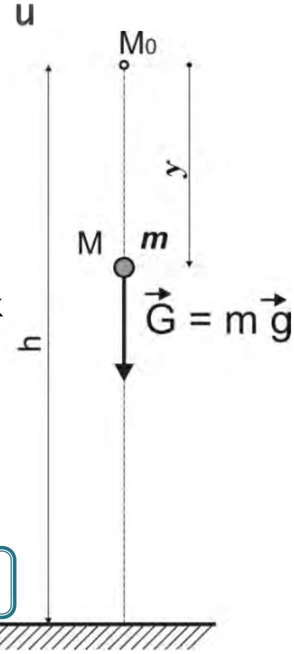
- Da zavisi samo od brzine

  Vertikalni hitac i slobodni pad u vazduhu

Sila je konstantna –slobodan pad u bezvazdušnom prostoru

- Tačka M pada iz položaja M_0 bez početne brzine, u polju Zemljine teže, sa visine h
- Visina se može smatrati zanemarljivom u odnosu na prečnik Zemlje, pa polje možemo smatrati homogenim
- Ako se zanemari otpor vazduha – bezvazdušni prostor i izabere vertikalna osa za analizu dobija se diferencijalna jednačina

$$\boxed{m\,\ddot{y} = mg}$$



Slobodan pad

$$\boxed{m\,\ddot{y} = mg}$$

- Diferencijalna jednačina kretanja

$$\ddot{y} = g$$

- Integraljenjem se dobija $\dot{y} = gt + C_1;$

$$t = 0, \rightarrow \ \dot{y} = V_0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

- Ponovnim integraljenjem $\dot{y} = gt$

$$\boxed{y = g\frac{t^2}{2} + C_2}$$

$$t = 0, \rightarrow \ y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Sila je konstantna –slobodan pad

- Jednačina kretanja je $y = g\dfrac{t^2}{2}$

$$t^2 = \frac{2y}{g} \ \rightarrow t = \sqrt{\frac{2y}{g}} \qquad \dot{y} = gt = g \cdot \sqrt{\frac{2y}{g}} = \sqrt{\frac{g^2 2y}{g}} = \sqrt{2gy}$$

- Iz jednačine se dobija zavisnost brzine od položaja

$$\dot{y} = \sqrt{2g\,y}$$

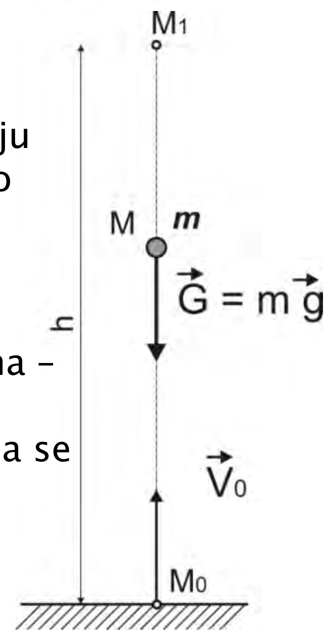
- Vreme padanja tačke sa visine h

$$y = h = \tfrac{1}{2}gT^2 \rightarrow T^2 = \frac{2\,h}{g} \qquad T = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$

Vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru

- Tački M je u početnom položaju M_0 saopštena brzina vertikalno naviše u polju Zemljine teže
- Nastalo kretanje naziva se vertikalnim hicem
- Ako se zanemari otpor vazduha – bezvazdušni prostor i izabere vertikalna osa za analizu dobija se diferencijalna jednačina

$$m\vec{a} = \vec{G}$$



Vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru

- Diferencijalna jednačina

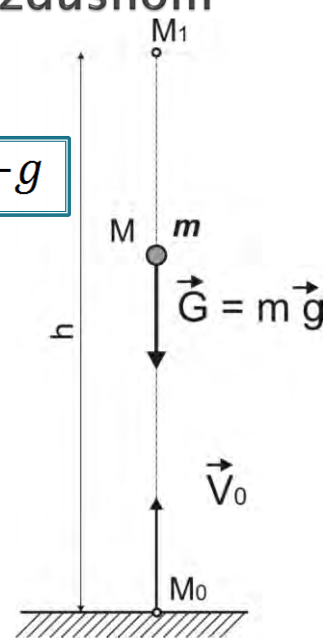
$$m\vec{a} = -m\vec{g} \qquad \boxed{\ddot{y} = -g}$$

- Integraljenjem po vremenu

$$\dot{y} = -\int g dt + C_1$$

- Iz početnih uslova
  $\rightarrow t = 0 \rightarrow V = V_0 \rightarrow C_1 = V_0$
- Dobija se zakon promene brzine

$$\boxed{\dot{y} = -gt + V_0}$$



Vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru

- Diferencijalna jednačina brzine

$$\boxed{\dot{y} = -gt + V_0}$$

- Integraljenjem po vremenu

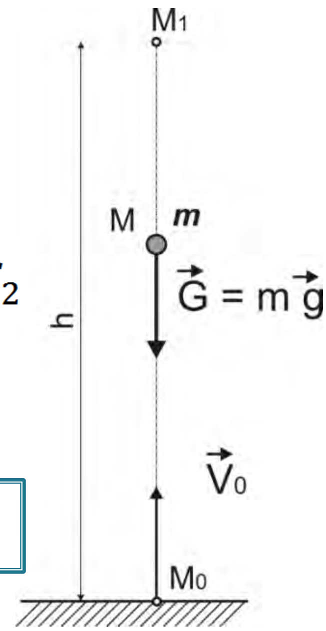
$$y = -g\int t\,dt + V_0 \int dt + C_2$$

- Iz početnih uslova

$\rightarrow t = 0 \rightarrow h = y = 0 \rightarrow C_2 = 0$

- Dobija se zakon promene visine

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t}$$



Vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 t}$$

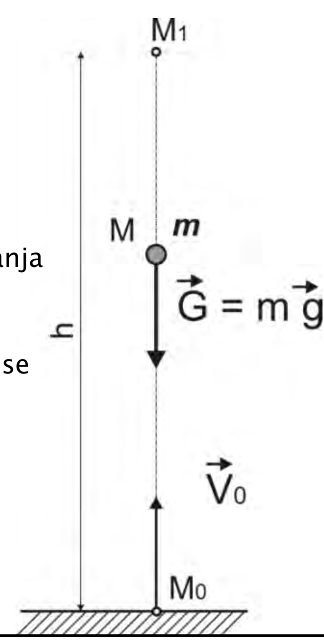
- Kretanje je jednakousporeno
- Ne zavisi od mase
- Telo će se kretati naviše dok brzina kretanja ne bude jednaka 0

$$\dot{y} = 0$$

- Iz uslova da je brzina jednaka nuli može se odrediti vreme kretanja

$$\dot{y} = -gt + V_0 = 0$$

$$0 = -gT + V_0 \quad \rightarrow T = \frac{V_0}{g}$$



Vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru

- Kako je određeno vreme kretanja naviše može se odrediti i visina na koju dospeva tačka

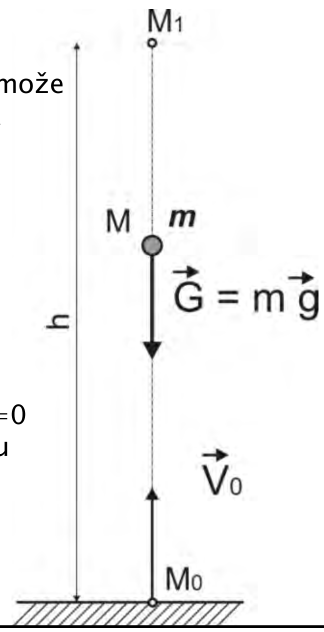
$$y = h = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0t$$

$$h = -\frac{1}{2}gT^2 + V_0T$$

$$h = -\frac{1}{2}g\left(\frac{V_0}{g}\right)^2 + V_0\frac{V_0}{g} = \frac{V_0^2}{2g}$$

- Ako se u jednačinu kretanja stavi da je y=0 dobija se vreme za koje se tačka M vrati u početni položaj

$$y = 0 = -\frac{1}{2}gt_{1/2}^2 + V_0t_{1/2}$$



Vertikalni hitac u bezvazdušnom prostoru

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

- Rešavanjem kvadratne jednačine $y = 0 = -\frac{1}{2}gt_{1/2}^2 + V_0t_{1/2}$

$$t_{1/2} = \frac{-V_0 \pm \sqrt{{V_0}^2 - 4\frac{1}{2}g0}}{-2\frac{1}{2}g} = \frac{-V_0 \pm V_0}{-g} \qquad t_1 = 0 \qquad t_2 = \frac{2V_0}{g}$$

- Rešenja pokazuju: prvo kada počinje kretanje, a drugo kada se tačka ponovo vrati u početni položaj
- Može se uočiti da je vreme uspona i pada duplo veće od vremena kretanja naviše

$$t_2 = \frac{2V_0}{g} = 2T$$

- Jednaka su vreme pada i vreme penjanja, a brzina u trenutku povratka jednaka je brzini kojom je tačka izbačena, ali suprotnog smera

$$\dot{y}_2 = -gt_2 + V_0 = -g\frac{2V_0}{g} + V_0 = -V_0$$

Pravolinijsko kretanje kod koga je sila funkcija brzine

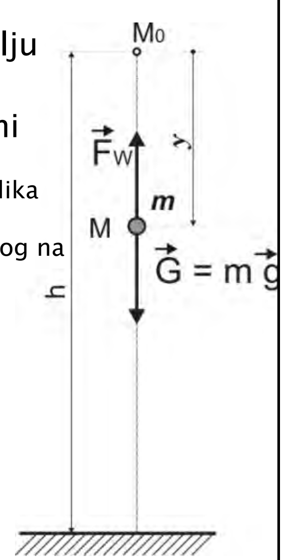
- Poseban slučaj je kretanje materijalne tačke pod uticajem sile zavisne od brzine
- Kada se telo kreće kroz sredinu koja pruža otpor tom kretanju (kretanje kroz vodu, kroz vazduh, na hrapavoj strmoj ravni) ogledima je utvrđeno da sile otpora kretanju zavise od više različitih faktora ali se u određenim slučajevima otpori mogu izraziti kao funkcije pojedinih parametara.
- Poseban slučaj je kada se otpori kretanja mogu izraziti kao otpori koji zavise od brzine
- Pri brzinama do 1m/s otpor kretanju tela kroz vazduh zavisi od oblika površine i linearno je srazmeran brzini
- Kod kretanja tela kroz vazduh većim brzinama ali daleko manjim od 340m/s otpor kretanju pored oblika i površine zavisi i od kvadrata brzine kretanja

Sila zavisi samo od brzine – slobodan pad u vazduhu

- Tačka mase m pada u homogenom polju težine
- Sila otpora kretanja srazmerna je brzini kretanja

$$F_W = c\rho A\dot{y}^2$$

C – konstanta zavisna od oblika
ρ – gustina vazduha
A – površina preseka upravnog na kretanje



- Dobija se vektorska diferencijalna jednačina

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_W}$$

Sila zavisi samo od brzine – slobodan pad u vazduhu

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_W$$

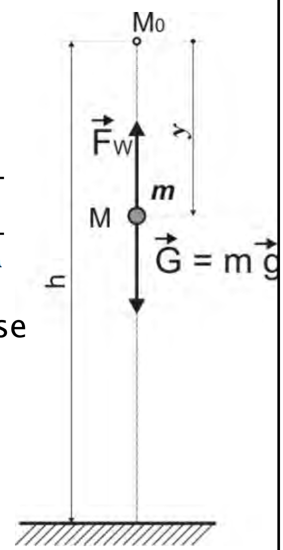
- Projektovanjem na y osu dobija se

$$m\ddot{y} = mg - c\rho A\dot{y}^2$$

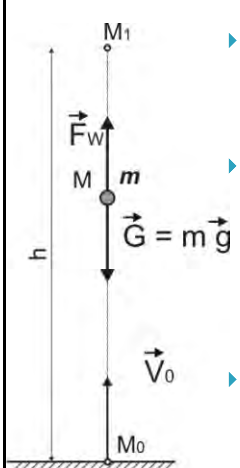
- Uvodi se konstanta $k = \sqrt{\dfrac{mg}{c\rho A}}$

- Posle dvostrukog integraljenja dobija se

$$\boxed{y = \frac{k^2}{g} ln\left[ch\left(\frac{gt}{k}\right)\right]}$$



Sila zavisi samo od brzine – vertikalni hitac u vazduhu



- Tački mase m saopštena je početna vertikalna brzina u homogenom polju težine

- Sila otpora kretanja srazmerna je brzini kretanja

$$F_W = c\rho A\dot{y}^2$$

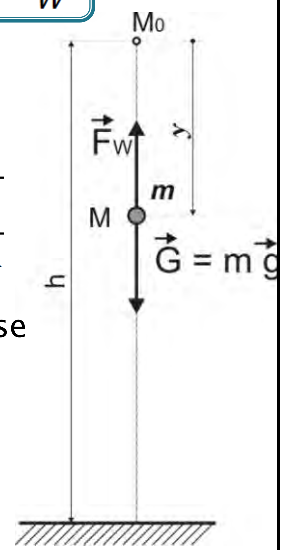
C – konstanta zavisna od oblika
ρ – gustina vazduha
A – površina preseka upravnog na kretanje

- Dobija se vektorska diferencijalna jednačina

$$\boxed{m\vec{a} = -\vec{G} - \vec{F}_W}$$

Sila zavisi samo od brzine – vertikalni hitac u vazduhu

$$\boxed{m\vec{a} = -\vec{G} - \vec{F}_W}$$



- Projektovanjem na y osu dobija se

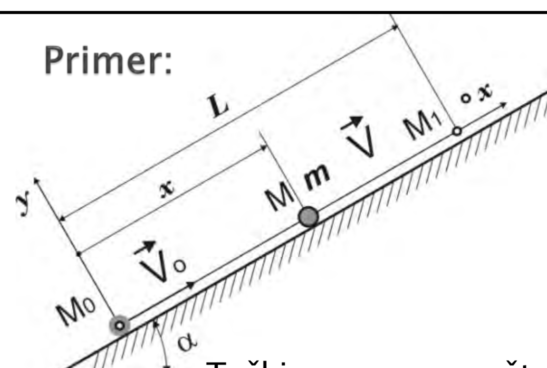
$$m\ddot{y} = -mg - c\rho A\dot{y}^2$$

- Uvodi se konstanta $k = \sqrt{\frac{mg}{c\rho A}}$

- Posle dvostrukog integraljenja dobija se

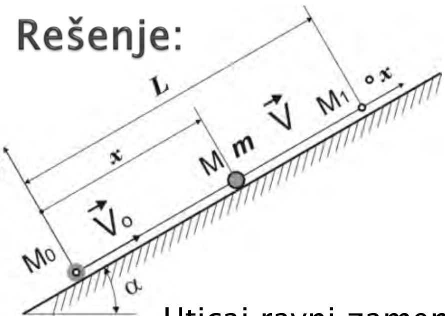
$$\boxed{y = \frac{k^2}{g} ln\left[\frac{V_0}{k} sin\left(\frac{gt}{k}\right) + cos\left(\frac{gt}{k}\right)\right]}$$

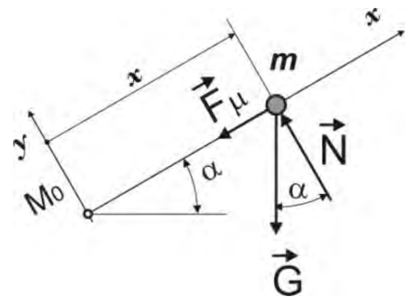
Primer:



- Tački mase m saopštena je početna brzina V_0 uz strmu ravan nagiba α. Ako je koeficijent trenja u toku kretanja μ=const. Odrediti najudaljeniji položaj do koga će tačka dospeti, uslov koji mora biti ispunjen da bi tačka počela da klizi niz strmu ravan, kao i brzinu koju će dostići pri prolasku kroz početni položaj.

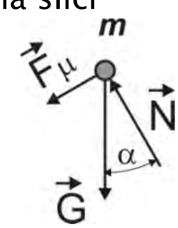
Rešenje:



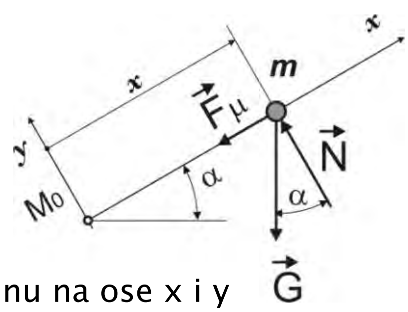


Uticaj ravni zamenjuje se normalnom silom
Uticaj trenja pri kretanju uz ravan zamenjuje se silom trenja (Kulonova sila trenja)
Usvaja se koordinatni sistem kao na slici

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu}$$



Rešenje:



$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$$

Projektovati vektorsku jednačinu na ose x i y

$$\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + \ddot{y}\,\vec{\jmath} = \ddot{x}\,\vec{\imath} + 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} m\ddot{x} &= -G\ sin\alpha - F_\mu \\ 0 &= -G\ cos\alpha + N \end{aligned}}$$

$$F_\mu = \mu\ N = \mu\ G\ cos\alpha$$

Rešenje:

$$m\ddot{x} = -G\ sin\alpha - F_{\mu}$$

$$m\ddot{x} = -mg\ sin\alpha - \mu\, mg\ cos\alpha$$

$$\ddot{x} = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)$$

$$\dot{x} = -\int g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)\, dt + C_1$$

$$\dot{x} = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha) \int dt + C_1$$

$$t = 0 \rightarrow \dot{x} = V_0 \rightarrow C_1 = V_0$$

$$\dot{x} = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)t + V_0$$

Rešenje:

$$\dot{x} = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)t + V_0$$

$$x = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha) \int t dt + \int V_0 dt + C_2$$

$$t = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

$$x = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_0 t$$

$$\boxed{x = -\frac{1}{2} g(sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)t^2 + V_0 t}$$

Tačka se kreće dok brzina ne padne na nulu

$$t_1 \rightarrow x = L, \dot{x} = 0 \rightarrow t_1 =$$

$$0 = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)t_1 + V_0$$

$$t_1 = \frac{V_0}{-g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)}$$

Rešenje:

$$t_1 \rightarrow x = L, \dot{x} = 0 \rightarrow t_1 =$$

Zamenom vremena u izraz za koordinatu x dobija se L

$$t_1 = \frac{V_0}{-g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)}$$

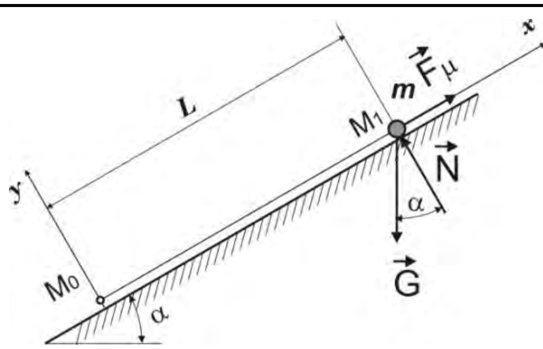
$$x = -g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)\frac{t^2}{2} + V_0 t$$

$$L = -\ \frac{1}{2} g(sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)t_1^2 + V_0 t_1$$

$$L = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g(sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)}$$

Rešenje:

Posle dostizanja krajnjeg položaja kada je brzina nula, tačka se zaustavlja i kreće niz strmu ravan ako je



$$\boxed{G\ sin\alpha > F_\mu}$$

$$mg\ sin\alpha - \mu mgcos\alpha > 0$$

$$sin\alpha - \mu\ cos\alpha > 0$$

Kada je nagib veći od ugla trenja nastaje kretanje, u suprotnom tačka se zaustavlja i ostaje u gornjem položaju

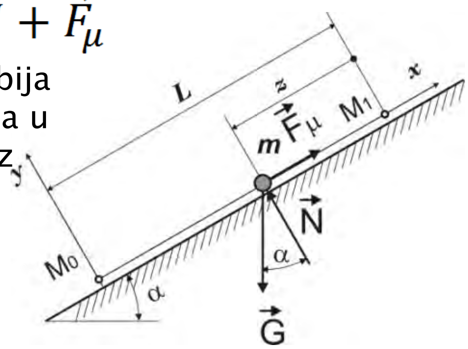
$$\frac{sin\alpha}{cos\alpha} = tg\alpha\ \ \rightarrow \mu = tg\rho \rightarrow \alpha > \mu$$

Rešenje:

Kada se analizira ravnoteža dobija se vektorska jednačina

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_\mu$$

Projektovana na ose x i z dobija se izraz za promenu ubrzanja u pravcu x ose– obeleženo sa z



$$m\ddot{z} = G\ sin\alpha - F_\mu$$

$$0 = -G\ cos\alpha + N$$

$$F_\mu = \mu\, N = \mu\, G\ cos\alpha$$

$$m\ddot{z} = mg\ sin\alpha - \mu\, mg\ cos\alpha$$

$$\ddot{z} = g\ (sin\alpha - \mu\ cos\alpha)$$

Rešenje:

$$\ddot{z} = g\ (sin\alpha - \mu\ cos\alpha)$$

Integraljenjem diferencijalne jednačine za početne uslove u kojima je brzina jednaka nuli (telo kreće iz mirovanja), a pozicija se meri od tačke M tako da je i početno pomeranje nula

$$\dot{z} = g\ (sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha) \int dt + C_1'$$

$$t' = 0 \rightarrow \dot{z} = 0 \rightarrow C_1' = 0$$

$$\dot{z} = g\ (sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)t$$

$$z = g\ (sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha) \int tdt + C_2'$$

$$t' = 0 \rightarrow z = 0 \rightarrow C_2' = 0$$

$$z = g\ (sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

Rešenje:

$$z = g\,(sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)\frac{t^2}{2}$$

Ako se pozicija z izjednači sa L odnosno izračuna vreme potrebno da se tačka vrati u početni položaj dobija se

$$z = L = g\,(sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)\frac{t_1'^2}{2} \qquad t_1' = \sqrt{\frac{2L}{g\,(sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)}}$$

Ukoliko se umesto L zameni vrednost izračunata pri kretanju uz strmu ravan

$$L = \frac{1}{2}\frac{V_0^2}{g(sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)}$$

$$t_1' = \sqrt{\frac{V_0^2}{g\,(sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)g(sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha)}}$$

$$t_1' = \frac{V_0}{g}\frac{1}{\sqrt{sin^2\alpha - \mu^2\ \ cos^2\alpha}}$$

Rešenje:

$$t_1' = \frac{V_0}{g}\frac{1}{\sqrt{sin^2\alpha - \mu^2\ \ cos^2\alpha}}$$

Zamenom vremena u izraz za brzinu pri kretanju niz ravan dobija se

$$\dot{z} = g\,(sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)t$$

$$V_2 = g\,(sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)t_1'$$

$$V_2 = g\,(sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha)\ \ \frac{V_0}{g}\frac{1}{\sqrt{sin^2\alpha - \mu^2\ \ cos^2\alpha}}$$

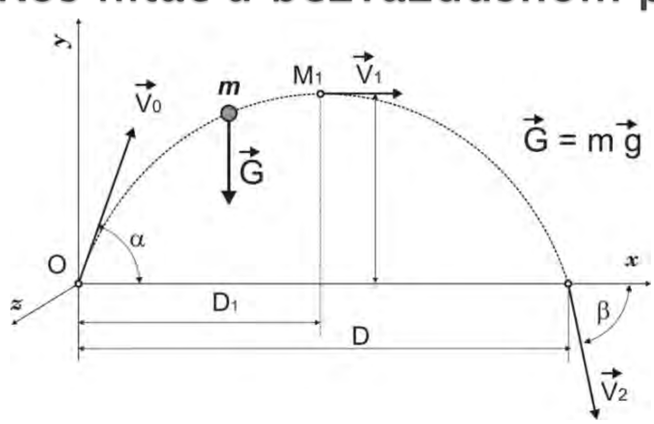
$$V_2 = V_0\sqrt{\frac{sin\alpha - \mu\ \ cos\alpha}{sin\alpha + \mu\ \ cos\alpha}}$$

Vidi se da je $V_2 < V_0$ usled gubitka energije na trenje, pri čemu se mehanički rad pretvara u toplotnu energiju

Krivolinijsko kretanje – kretanje u ravni

- Kod krivolinijskog kretanja tačke u pitanju je kretanje tačke u ravni pa je rešavanje diferencijalnih jednačina dosta komplikovanije
- Pokazani su primeri kosog i horizontalnog hica u bezvazdušnom prostoru – kretanja u homogenom polju Zemljine teže kod kojih se otpor vazduha zanemaruje
- Na materijalnu tačku izbačenu nekom brzinom deluje sila zemljine teže

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru



- Kretanje koje nastaje u homogenom polju Zemljine teže – materijalna tačka se izbaci pod kosim uglom u odnosu na horizont brzinom V_0

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru

- Diferencijalna jednačina u vektorskom obliku

$$m\vec{a} = \vec{G}$$

- U skalarnom obliku – projekcija na ose Dekartovog koordinatnog sistema

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -mg$$
$$m\ddot{z} = 0$$

- Integracijom se dobijaju projekcije brzina

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru

- Početna brzina ima projekcije na x i y osu dok je projekcija na z osu nula

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -mg$$
$$m\ddot{z} = 0$$

$$\boxed{\begin{aligned} t = 0 \rightarrow \dot{x} &= V_0 cos\alpha \\ \dot{y} &= V_0 sin\alpha \\ \dot{z} &= 0 \\ x = 0;\ \ y = 0;\ \ z &= 0 \end{aligned}}$$

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru

- Integraljenjem i zamenom početnih uslova

$$\dot{x} = C_1$$
$$\dot{y} = -gt + C_2$$
$$\dot{z} = C_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= V_0 cos\alpha \\ \dot{y} &= -gt + V_0 sin\alpha \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}}$$

- Zakoni kretanja su

$$x = V_0 cos\alpha\, t + C_4$$
$$y = -g\frac{t^2}{2} + V_0 sin\alpha\, t + C_5$$
$$z = C_6$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= V_0 t cos\alpha \\ y &= V_0 t sin\alpha - g\frac{t^2}{2} \\ z &= 0 \end{aligned}}$$

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru

- Materijalna tačka se kreće po paraboličnoj putanji čija je krivina okrenuta naniže

$$\boxed{\begin{aligned} x &= V_0 t cos\alpha \\ y &= V_0 t sin\alpha - g\frac{t^2}{2} \\ z &= 0 \end{aligned}}$$

$$t = \frac{x}{V_0 cos\alpha}$$

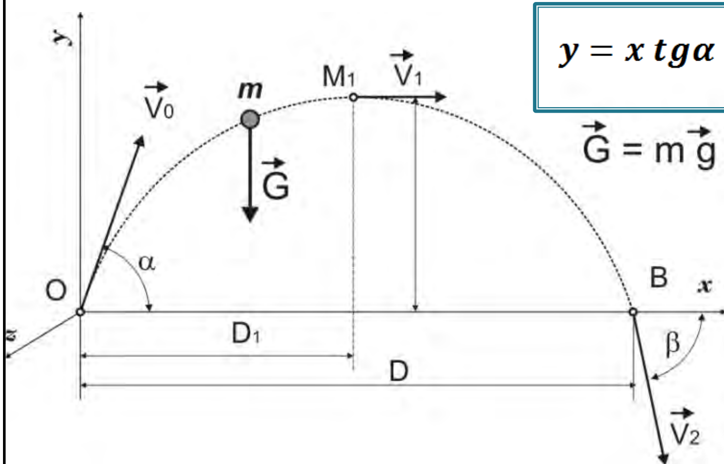
$$y = V_0\left(\frac{x}{V_0 cos\alpha}\right) sin\alpha - g\frac{\left(\frac{x}{V_0 cos\alpha}\right)^2}{2}$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = x\, tg\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2 cos^2\alpha} x^2}}$$

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru

- Parabolična putanja čija je krivina okrenuta naniže

$$y = x\,tg\alpha - \frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2 cos^2\alpha}x^2$$



$$\vec{G} = m\vec{g}$$

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru

- Kada tačka dostigne maksimalnu visinu brzina u pravcu y ose je nula

$$\dot{y} = -gt + V_0 sin\alpha$$

$$0 = -gt + V_0 sin\alpha \rightarrow t_1 = \frac{V_0 sin\alpha}{g}$$

- Zamenom t_1 dobijaju se koordinate tačke M_1

$$D_1 = V_0 t_1 cos\alpha = \frac{V_0^2 sin(2\alpha)}{2g}$$

$$H = V_0 t_1 sin\alpha - g\frac{t_1^2}{2} = \frac{V_0^2 sin^2\alpha}{2g}$$

Kos hitac u bezvazdušnom prostoru

- Vreme kada materijalna tačka dospeva u tačku B je kada je koordinata y=0

$$y = V_0 t sin\alpha \; - g\frac{t^2}{2} \qquad T = 0$$

$$0 = V_0 T sin\alpha \; - g\frac{T^2}{2} = \left(V_0 sin\alpha - \frac{gT}{2}\right)T \qquad T = \frac{2V_0 sin\alpha}{g}$$

- Zamenom T dobijaju se koordinate tačke B

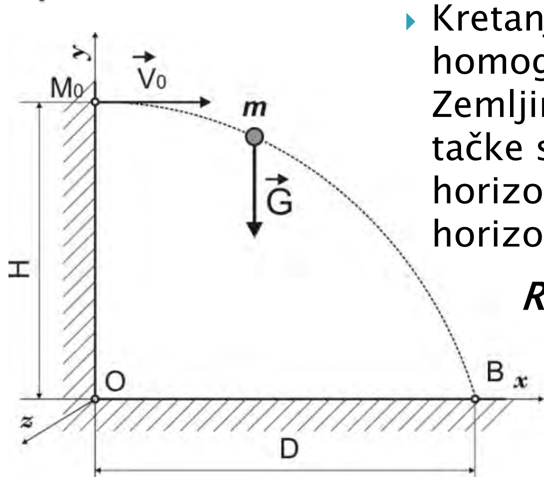
$$x = V_0 t cos\alpha$$

$$D = V_0 \frac{2V_0 sin\alpha}{g} cos\alpha = \frac{V_0^2 sin(2\alpha)}{g}$$

- Maksimalni domet je

$$D_{max} = \frac{V_0^2}{g} \rightarrow sin(2\alpha) = 90° \rightarrow \alpha = 45°$$

Horizontalni hitac u bezvazdušnom prostoru



- Kretanje koje nastaje u homogenom polju Zemljine teže – materijalna tačke se izbaci horizontalno iznad horizonta brzinom Vo

REŠENJE

diferencijalna jednačina kretanja

$$m\vec{a} = \vec{G}$$

$$m\vec{a} = -m\vec{g}$$

Horizontalni hitac u bezvazdušnom prostoru

- Diferencijalna jednačina u vektorskom obliku

$$m\vec{a} = \vec{G}$$

- U skalarnom obliku projekcija na ose Dekartovog koordinatnog sistema

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = -mg$$
$$m\ddot{z} = 0$$

- Integracijom se dobijaju projekcije brzina

Horizontalni hitac u bezvazdušnom prostoru

- Integraljenjem i zamenom početnih uslova

$t = 0 \rightarrow \dot{x} = V_0 \quad \dot{y} = 0 \quad \dot{z} = 0 \qquad x = 0; \;\; y = H; \;\; z = 0$

$$\dot{x} = C_1$$
$$\dot{y} = -gt + C_2$$
$$\dot{z} = C_3$$

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{x} &= V_0 \\ \dot{y} &= -gt \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned}}$$

- Zakoni kretanja su

$$x = V_0 t + C_4$$
$$y = -g\frac{t^2}{2} + C_5$$
$$z = C_6$$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= V_0 t \\ y &= H - g\frac{t^2}{2} \\ z &= 0 \end{aligned}}$$

Horizontalni hitac u bezvazdušnom prostoru

- z=0 – putanja materijalne tačke je u vertikalnoj ravni
- Jednačina putanje je parabola sa otvorom nadole

$$x = V_0 t \qquad t = \frac{x}{V_0}$$

$$y = H - g\frac{t^2}{2}$$

$$\boxed{y = H - \frac{gx^2}{2{V_0}^2}}$$

- Vreme leta $\quad y = H - g\frac{t^2}{2} = 0 \rightarrow T = \sqrt{\frac{2H}{g}}$
- Dolet $\quad x = V_0 t \rightarrow D = V_0\sqrt{\frac{2H}{g}}$