

## Ravno kretanje krutog tela

Zakoni kretanja tela i putanje tačke  
Razlaganje ravnog kretanja na translaciju i rotaciju  
Brzine tačaka tela u reprezentativnom preseku

## Ravno kretanje krutog tela

Najrasprostranija kretanja koja se sreću u tehnici su

- translatorno kretanje i
- obrtanje oko nepomične ose

Ali često se javlja i

- ravno kretanje

Ravno kretanje se sreće kod mehanizama koji prevode jedan oblik kretanja u drugi oblik kretanja - okretanja u translaciju i obrnuto

## Ravno kretanje krutog tela

Ravno kretanje predstavlja kombinaciju dva najprostija kretanja: translacije i obrtanja oko ose čiji je položaj promenljiv u toku vremena.

Kako je prisutno translatorno kretanje i obrtanje, to i izrazi za brzine i ubrzanja tačaka imaju

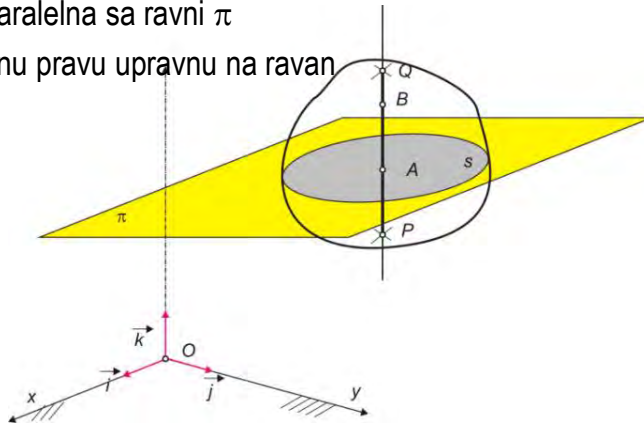
- delove koji se javljaju usled translacije
- delove koji se javljaju usled rotacije

## Ravno kretanje krutog tela

Kretanje tela se naziva ravnim kretanjem ako se sve tačke tela pomeraju u ravnima paralelnim nekoj nepomičnoj ravni

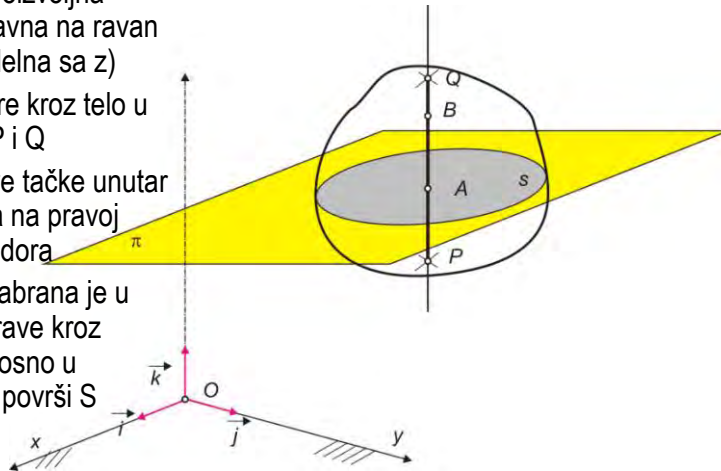
## Zakoni kretanja tela i putanje tačaka

- Uočena je proizvoljna ravan  $\pi$  koja preseca telo po površini  $s$
- Sa uočenom ravni bira se nepokretni koordinatni sistem  $Oxyz$  čija je ravan  $xOy$  paralelna sa ravni  $\pi$
- Uočiti proizvoljnu pravu upravnu na ravan



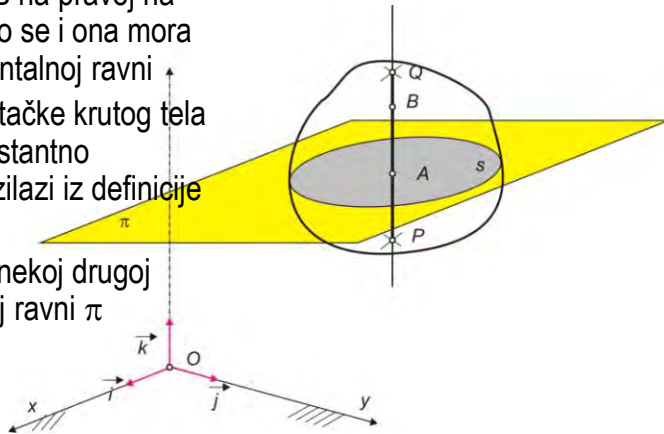
## Zakoni kretanja tela i putanje tačaka

- Uočena proizvoljna prava upravna na ravan  $Oxy$  (paralelna sa  $z$ )
- Ona prodire kroz telo u tačkama  $P$  i  $Q$
- izabrati dve tačke unutar krutog tela na pravoj unutar prodora
- Tačka  $A$  izabrana je u prodoru prave kroz ravan odnosno u presečnoj površi  $S$



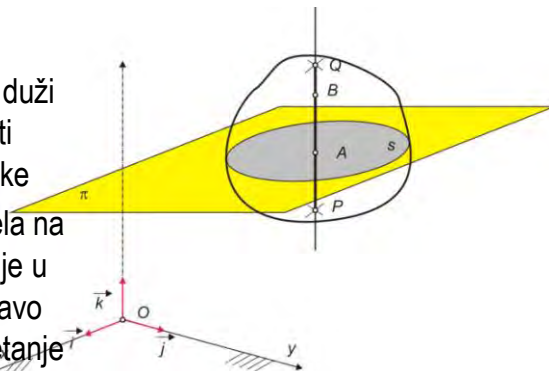
## Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

- Tačka A pripada preseku S, njena putanja pripada ravni S
- Kako je tačka B na pravoj na rastojanju AB to se i ona mora kretati u horizontalnoj ravni
- Tačke A i B su tačke krutog tela pa njihovo konstantno rastojanje proizilazi iz definicije krutog tela
- Tačka B leži u nekoj drugoj ravni paralelnoj ravni  $\pi$



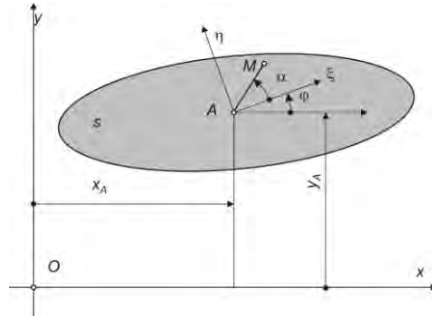
## Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

- Prava koja prodire kroz telo u tačkama P i Q ostaje stalno paralelna osi z
- Za potpuno definisanje kretanja bilo koje tačke duži PQ dovoljno je poznavati kretanje samo jedne tačke
- Presek S je projekcija tela na ravan kretanja, zamenjuje u kinematičkom smislu čitavo telo, pa se posmatra kretanje samo u ravni preseka S



## Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

- Kako se posmatra kretanje preseka S u odnosu na nepomični koordinatni sistem Oxyz, uoči se i pokretni sistem Aξηζ čije su ose čvrsto vezane za ravan S a ζ osa paralelna sa z osom i tačka A je koordinatni početak
- Položaj neke tačke M se definiše kao

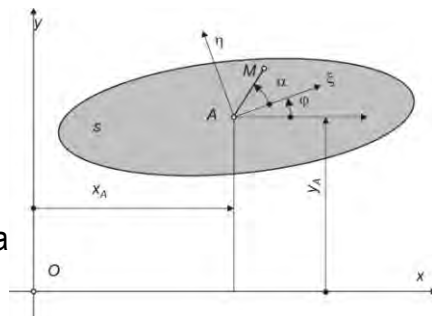


$$\xi = \overline{AM} \cos \alpha = \text{const}$$

$$\eta = \overline{AM} \sin \alpha = \text{const}$$

## Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

- Položaj neke tačke M u odnosu na Oxyz se definiše kao



$$x = x_A(t) + \overline{AM} \cos[\alpha + \varphi(t)]$$

$$y = y_A(t) + \overline{AM} \sin[\alpha + \varphi(t)]$$

$$z = \text{const.}$$

### Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

$$x = x_A(t) + \overline{AM} \cos[\alpha + \varphi(t)]$$

$$y = y_A(t) + \overline{AM} \sin[\alpha + \varphi(t)]$$

$$z = \text{const.}$$

- Kako je M proizvoljna tačka krutog tela preseka S to znači da je sa tri skalarnе funkcije definisan položaj bilo koje tačke preseka S

Zakoni ravnog  
kretanja

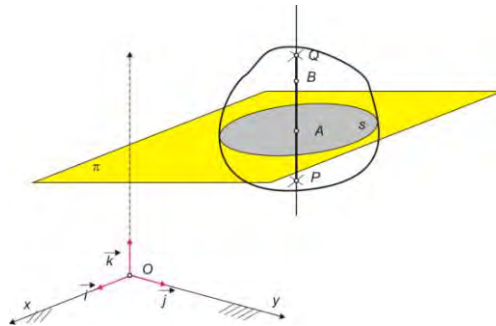
$$x_A = x_A(t)$$

$$y_A = y_A(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

### Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

- U daljem izlaganju ravan u kojoj se izvodi ravno kretanje – reprezentativna ravan biće predstavljena u ravni papira i uzimana u prezentacijama bez posebnog naglašavanja



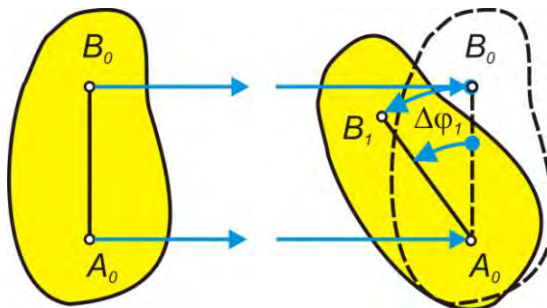
## Razlaganje ravnog kretanja na translaciju i rotaciju

Ravno kretanje je složeno kretanje koje se sastoji od dva kretanja: translatornog kretanja i rotacije

(u primeru - translacija tačke A i obrtanje u ravni S)

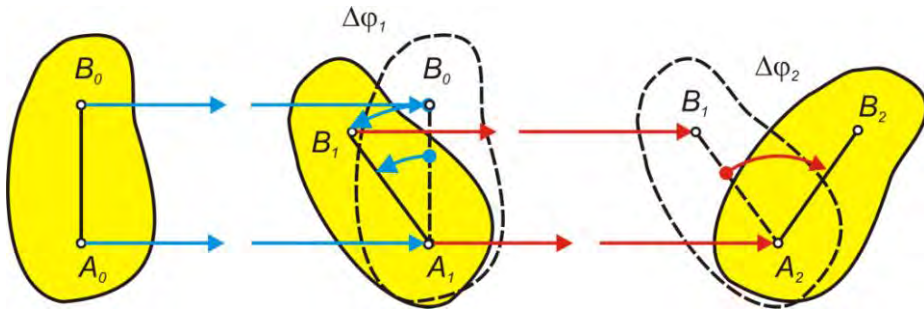
### Prikaz dva kretanja u ravni

Ravno kretanje je složeno kretanje koje se sastoji od dva kretanja - translatornog kretanja i rotacije



## Prikaz dva kretanja u ravni

Ravno kretanje je složeno kretanje koje se sastoji od dva kretanja - translatornog kretanja i rotacije

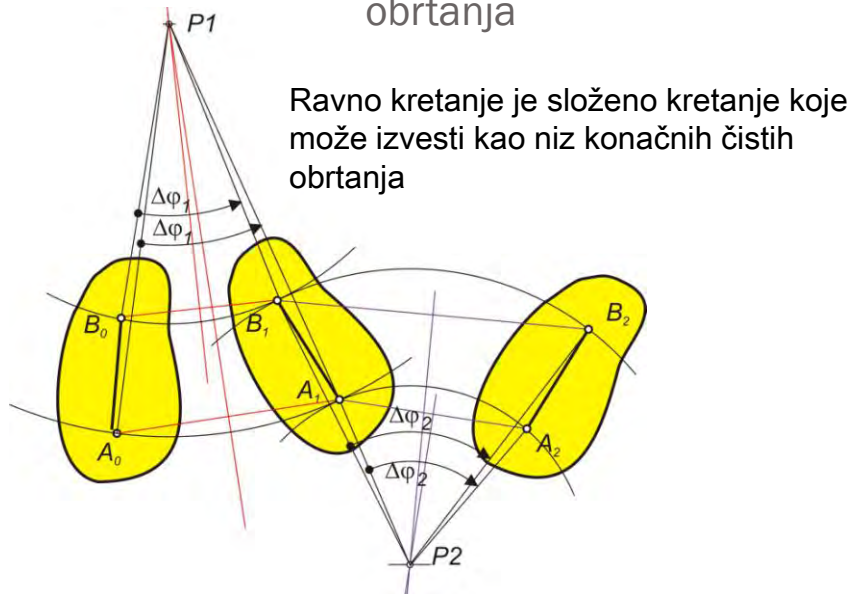


**Ravno kretanje se može razložiti na konačan broj rotacija**

Kretanje tela u ravni može se definisati i kao niz rotacija oko trenutnih centara rotacije koji se ne poklapaju i nazivaju se centrima konačnog obrtanja



## Prikaz kretanja u ravni kao konačnog broja obrtanja



## Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

$$x = x_A(t) + \overline{AM} \cos[\alpha + \varphi(t)]$$

$$y = y_A(t) + \overline{AM} \sin[\alpha + \varphi(t)]$$

$$z = \text{const.}$$

- Kako je M proizvoljna tačka krutog tela preseka S to znači da je sa tri skalarnе funkcije definisan položaj bilo koje tačke preseka S

Zakoni ravnog  
kretanja

$$x_A = x_A(t)$$

$$y_A = y_A(t)$$

$$\varphi = \varphi(t)$$

## Zakoni kretanja tela i putanje tačkaka

- Vektor ugaone brzine i vektor ugaonog ubrzanja pri ravanskom kretanju ima stalni pravac koji je normalan na ravanski presek

$$\varphi = \varphi(t)$$

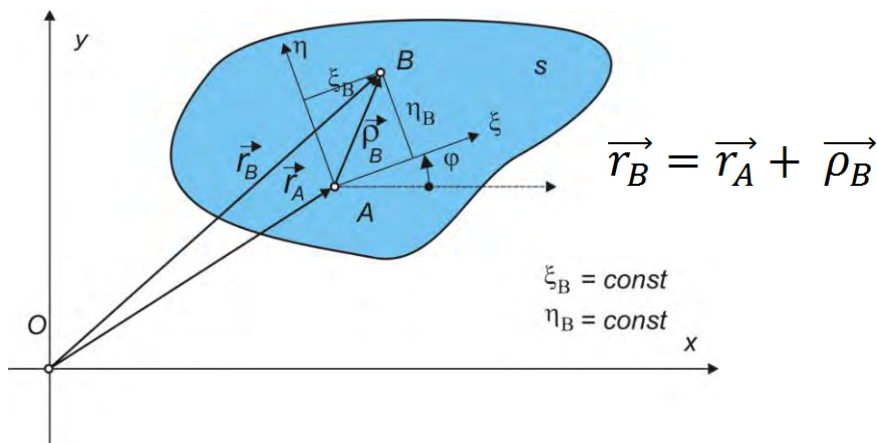
$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}(t) = \omega(t)$$

$$\ddot{\varphi} = \ddot{\varphi}(t) = \dot{\omega}(t) = \varepsilon(t)$$

$$\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{k} = \dot{\varphi} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \cdot \vec{k} = \dot{\omega} \cdot \vec{k} = \ddot{\varphi} \cdot \vec{k}$$

## Veza između brzina dve tačke



## Veza između brzina dve tačke

- Saglasno pokazanim zakonima kretanja tačaka tela u ravni

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_B}{dt}$$

- Kako je vektor  $\vec{r}$  čvrsto vezan za presek i definisan u koordinatnom sistemu  $A\xi\eta\zeta$ , a tačke A i B su materijalne tačke krutog tela, to se intenzitet vektora ne menja (prema definiciji krutog tela) već se menja samo njegov ugao u odnosu na koordinatni sistem Oxyz

$$\frac{d\vec{\rho}_B}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{AB}$$

## Veza između brzina dve tačke

- Brzina tačke B se kod ravnog kretanja tela može izraziti kao brzina tačke A kojoj se dodaje brzina obrtanja tačke B oko tačke A

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{\rho}_B}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\rho}_B}{dt} = \vec{\omega}_A \times \vec{AB} \quad \vec{V}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{AB}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{\omega}_A \times \vec{AB}$$

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$$

## Veza između brzina dve tačke

$$\vec{V}_{BA} = \vec{\omega}_A \times \vec{AB}$$

- Vektor je određen sledećim elementima:
  - Po intenzitetu jednak je proizvodu intenziteta ugaone brzine preseka i rastojanja tačaka

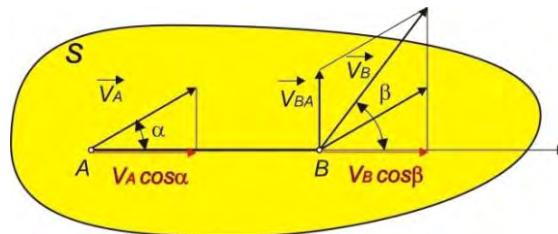
$$\vec{V}_{BA} = |\vec{\omega}| \cdot \overline{AB} \sin(\widehat{(\vec{\omega}, \overline{AB})}) = |\vec{\omega}| \cdot \overline{AB}$$

- Leži u ravni preseka (odnosno ravanskog kretanja)
- Upravan na pravac duži AB
- Smer zavisi od znaka odnosno smeru ugaone brzine preseka

Osobine brzina tačaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TEOREMA O PROJEKCIJAMA BRZINA**

**Projekcija brzina bilo koje dve tačke reprezentativnog preseka na pravac koji ih spaja su jednake**

$$V_A \cos \alpha = V_B \cos \beta$$

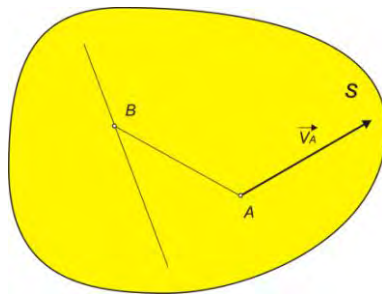


Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**Grafičko rešavanje – PLAN BRZINA**

**Kada je poznata brzina jedne tačke i pravac brzine druge tačke grafički se planom brzina dobija brzina druge tačke**

- Nacrtati u razmeri brzinu tačke A kao orijentisanu duž
- Na kraju duži (tačka a) povući pravac normalan na pravu AB
- Iz početka plana brzina p povući pravac brzine tačke B
- U preseku pravca brzine tačke B i normalnog pravca na AB dobija se kraj duži pb koja reprezentuje vektor brzine tačke B

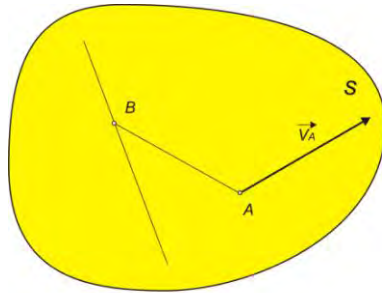
Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**Grafičko rešavanje – PLAN BRZINA**



$$U_V = \frac{m}{\frac{s}{cm}}$$

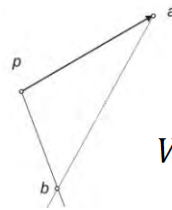
$$|\vec{p}\vec{a}| = \frac{v_A}{u_V}$$

Osobine brzina tačaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**Grafičko rešavanje – PLAN BRZINA**



$$U_V = \frac{m}{cm}$$

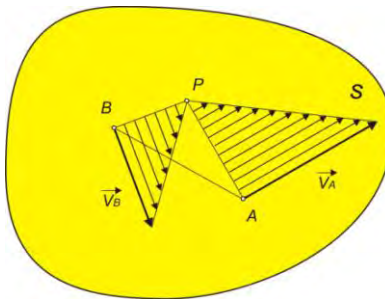
$$|\overline{pa}| = \frac{V_A}{U_V}$$



$$V_B = \overline{pb} \cdot U_V$$

Osobine brzina tačaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TREKUTNI POL (centar) BRZINA**

**Trenutnim polom (centrom) brzina naziva se tačka reprezentativnog preseka čija je brzina u datom trenutku jednaka nuli**



Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TREKUTNI POL (centar) BRZINA**

- Ako u datom trenutku vremena postoji trenutni pol brzina:
  - Raspored brzina pri ravnom kretanju oko trenutnog pola brzina isti je kao kod obrtanja oko ose, a osa prolazi kroz pol P i upravna je na ravan kretanja
  - Trenutna brzina obrtanja pola je nula
  - Raspored brzina oko trenutnog pola brzina je linearan

$$\vec{V}_A = \vec{V}_P + \vec{V}_{AP} = \vec{V}_P + \vec{\omega} \times \overline{PA} = \vec{\omega} \times \overline{PA}$$

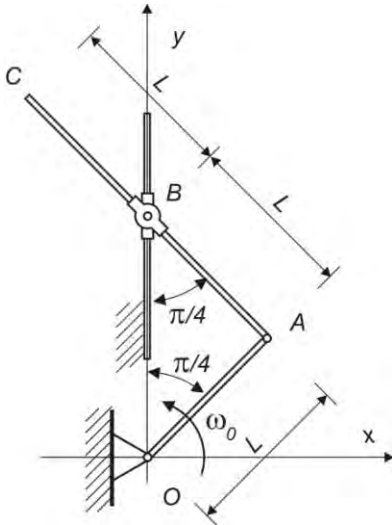
Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TREKUTNI POL (centar) BRZINA**

- Primenom uočenih karakteristika rešavaju se zadaci
- Ako je poznata brzina jedne tačke i pravac brzine druge tačke može se definisati trenutni pol brzina
- Podizanjem normala na pravce brzina u tačkama u kojima deluju brzine i njihovim presekom definisan je trenutni pol brzina
- Na osnovu brzine jedne tačke definiše se trenutna ugaona brzina tela koje izvodi ravno kretanje oko trenutnog pola

$$V_A = \overline{PA} \cdot \omega \rightarrow \omega = \frac{V_A}{PA}$$

$$V_B = \overline{PB} \cdot \omega$$

Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**



PRIMER:

- Posmatra se mehanizam koji se sastoji od dve međusobno zgلوبno vezane poluge . Poluga OA je zgلوبno vezana u tački O i preko njenog kretanja ugaonom brzinom  $\omega$  se ostvaruje kretanje mehanizma. Tačka B zgلوبno je vezana za klizač. Odrediti brzinu tačke C na kraju štapa ABC.
- Dimenzije poluga su date na slici

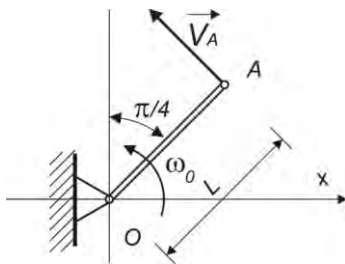
Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

PRIMER:

- Pošto je poluga OA prinuđena da se okreće oko tačke O ugaonom brzinom  $\omega_0$  , brzina  $V_A$  je normalna na OA i ima intenzitet

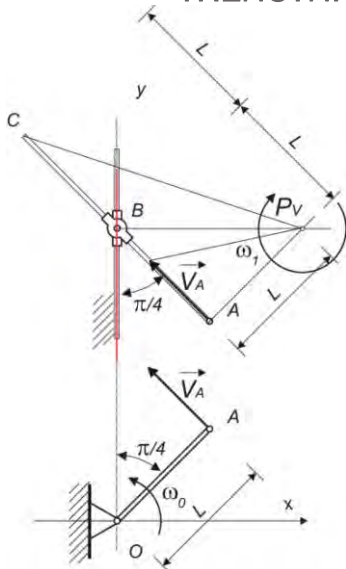
$$V_A = \overline{OA} \cdot \omega_0 = L \cdot \omega_0$$

- Tačka A pripada i štapu AB pa je i brzina štapa AB u tački A ista,  $V_A$





Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

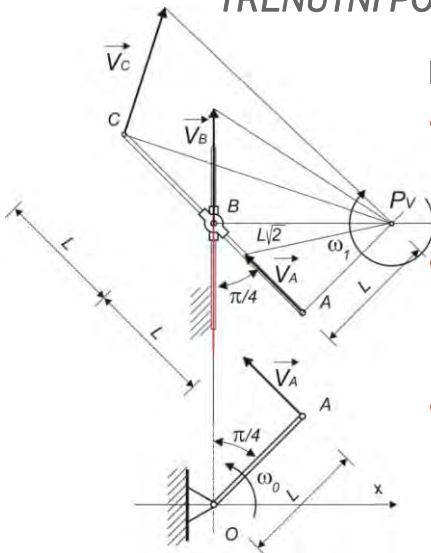


PRIMER:

- Trenutni pol brzina nalazi se na normalni na  $V_A$  iz tačke A i normalni na vertikalni pravac kroz tačku B (tačka B mora da ima brzinu u pravcu vođice)
- Ugaona brzina  $\omega_1$  - brzina oko trenutnog pola brzina  $P_V$ :  

$$\omega_1 = \frac{V_A}{PA} = \frac{L \cdot \omega_0}{L} = \omega_0$$
- Tačka B pripada i štapu AB pa je i ugaona brzina štapa AB  $\omega_1$

Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**



PRIMER:

- Ugaona brzina  $\omega_1$  - brzina oko trenutnog pola brzina  $P_V$   

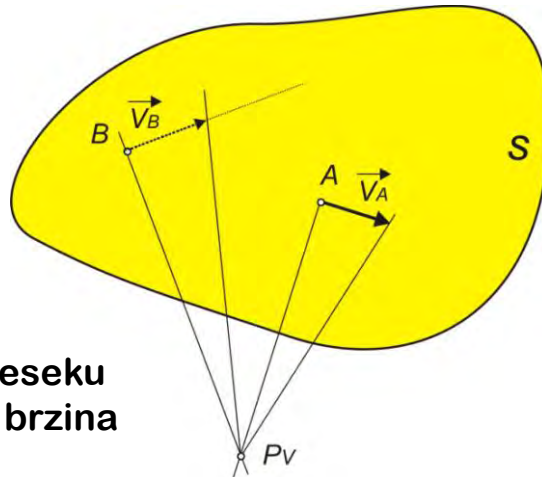
$$\omega_1 = \frac{V_A}{PA} = \frac{L \cdot \omega_0}{L} = \omega_0$$
- Tačka B pripada i štapu AB pa je i ugaona brzina štapa AB  $\omega_1$   

$$V_B = \overline{PB} \cdot \omega_1 = L\sqrt{2} \cdot \omega_0$$
- Tačka C ima brzinu  

$$V_C = \overline{PC} \cdot \omega_1 = L\sqrt{5} \cdot \omega_0$$

Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

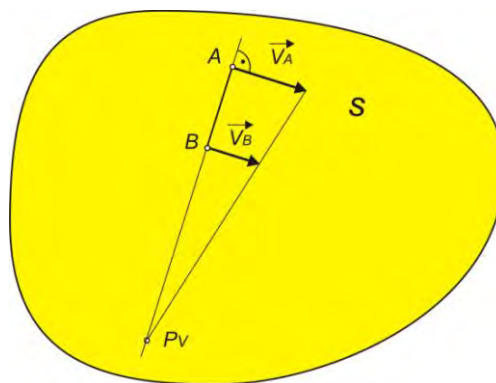
Data je brzina  
 jedne tačke i  
 pravac brzine  
 druge tačke



Položaj pola je u preseku  
 normala na pravce brzina

Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

Vektori brzina  
 su paralelni i  
 upravni na duž  
 AB

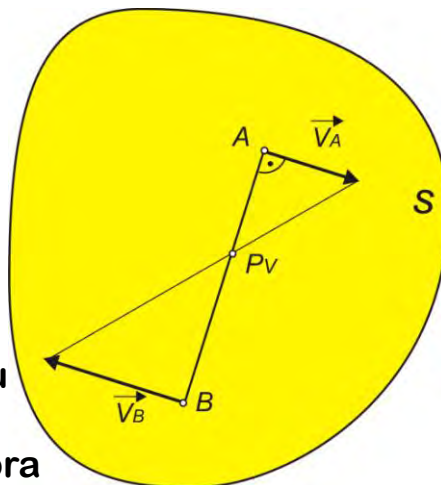


Položaj pola je u preseku  
 pravca AB i pravca koji prolazi  
 kroz vrhove vektora brzina

Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

Vektori brzina su paralelni i upravni na duž AB, a suprotnih smerova

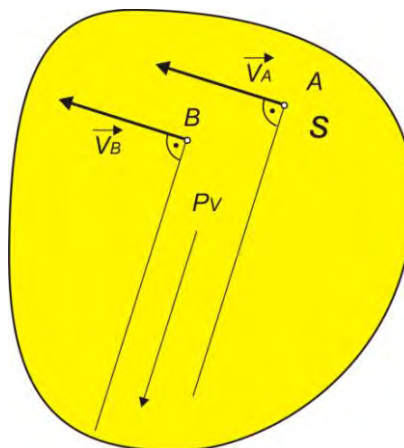
Položaj pola je u preseku pravca AB i pravca koji prolazi kroz vrhove vektora brzina



Osobine brzina tačkaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

Vektori brzina su paralelni i nisu upravni na duž AB

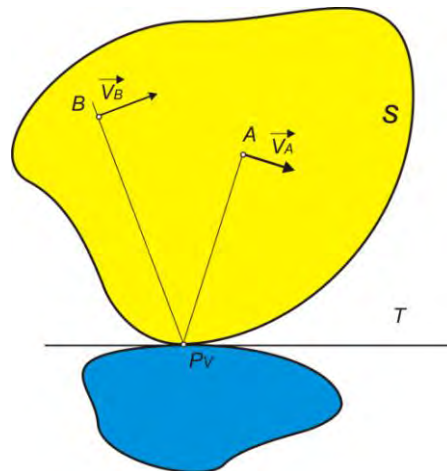
Položaj pola je u beskonačnosti, pa su brzine jednake



Osobine brzina tačaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

Ravno kotrljanje  
 bez klizanja

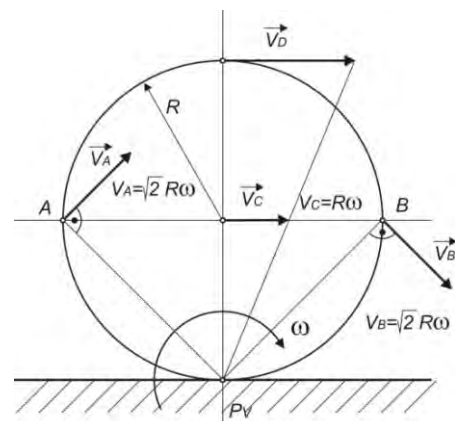
Položaj pola je u tački  
 dodira krivih površina



Osobine brzina tačaka tela koje izvodi ravansko kretanje  
**TRENUTNI POL (centar) BRZINA**

Ravno kotrljanje  
 bez klizanja

Položaj pola je u tački  
 dodira diska i ravne ili  
 krive površi



**REZIME:****Osobine brzina tačaka tela koje izvodi ravansko kretanje**

- Kretanje tela se naziva ravnim kretanjem ako se sve tačke tela pomeraju u ravnima paralelnim nekoj nepomičnoj ravni
  - Ravno kretanje se sreće kod mehanizama koji prevode jedan oblik kretanja u drugi oblik kretanja - rotaciju u translaciju i obrnuto
- Ravno kretanje predstavlja kombinaciju dva najprostija kretanja: translacije i obrtanja oko ose čiji je položaj promenljiv u toku vremena. Kako je prisutno translatorno kretanje i obrtanje, to i izrazi za brzine i ubrzanja tačaka imaju:
- delove koji se javljaju usled translacije
  - delove se javljaju usled rotacije
  - Ravno kretanje je složeno kretanje koje se može izvesti kao niz konačnih čistih obrtanja

**REZIME:****Osobine brzina tačaka tela koje izvodi ravansko kretanje**

- Sa tri skalarnе funkcije definisan je položaj bilo koje tačke preseka tela koje izvodi ravno kretanje
- Primenom uočenih karakteristika rešavaju se zadaci
- Ako je poznata brzina jedne tačke i pravac brzine druge tačke može se definisati trenutni pol brzina
- Podizanjem normala na pravce brzina u tačkama u kojima deluju brzine i njihovim presekom definisan je trenutni pol brzina
- Na osnovu brzine jedne tačke definiše se trenutna ugaona brzina tela koje izvodi ravno kretanje oko trenutnog pola