Zadatak i istorijski razvoj dinamike
Osnovni zakoni dinamike
Podela dinamike

Dinamika

Zadatak dinamike

- Zadatak dinamike je proučavanje kretanja materijalnih tela pod dejstvom sila
- Kinematika izučava samo geometriju kretanja
- Dinamika postavlja osnovne zakone kretanja uzimajući u obzir materijalnost tela (mase) i uzroke koji kretanje izazivaju (sile), težeći da razvije potpunu teoriju kretanja

Zadatak dinamike

- Dinamika izučava kretanja kod kojih su brzine male u odnosu na brzinu svetlosti i ona predstavlja deo takozvane klasične mehanike
- Za brzine bliske brzini svetlosti (300.000 km/h) važe drugačiji zakoni kretanja – zakoni relativne mehanike

Zadatak dinamike

- Sva kretanja u makro svetu koji nas okružuje su u oblasti klasične mehanike
- Dinamika ne uzima u obzir mikrostrukturu materijalnih tela i njeni zakoni se ne odnose na mikrokretanja u strukturi materije – time se bavi atomska fizika i kvantna mehanika

Istorijski razvoj

Osnovne zakone dinamike su postavili:

- Galilej (1564-1642)- uveo u dinamiku pojam brzine, ubrzanja i utvrdio zakon slobodnog padanja tela, formulisao prvi zakon dinamike
- Isak Njutn (1643-1727) daje potpunu formulaciju osnovnih zakona dinamike pa se celokupna mehanika zasniva na Njutnovim zakonima - Njutnova mehanika

Istorijski razvoj

U XVIII veku - analitičke metode u dinamici, diferencijalni i integralni račun

- Ojler (1707-1783)
- Dalamber (1717-1783)
- Lagranž (1763-1813)
- I. Bernuli (1667-1748)
- D. Bernuli (1700-1782)

Istorijski razvoj

U XIX veku – nove analitičke metode

- Mopertui (1698–1759)
- Hamilton (1805–1863)
- Gaus (1777–1855)

Istorijski razvoj

U XIX veku – počinje izučavanje tela promenljive mase – osnova današnje raketne tehnike

- Merščerski (1859–1935)
- Ciolkovski (1857–1935)
- Ljapunov (1956–1918)

Istorijski razvoj

Razvoj nuklearne fizike i elektrodinamike – pojavljuje se relativistička dinamika čiji je tvorac **Albert Anštajn** (1879-1955)

Novo shvatanje prostora, vremena i mase i postavlja se granica klasične Njutnove mehanike

Istorijski razvoj

Razvoj računara ogromnih kapaciteta i brzina računanja donosi nove približne metode (numeričke metode) rešavanja problema mehanike

Numeričke metode posebno u statici i u dinamici deformabilnih tela pružaju nemerljive mogućnosti

Osnovni zakoni dinamike

- Dinamika prema Njutnovoj formulaciji ima tri zakona, s tim što drugi zakon sadrži dodatak koji se formuliše kao poseban zakon

Prvi zakon

Svako telo ostaje u stanju mirovanja ili relativnog pravolinijskog kretanja dok pod dejstvom sila ne bude primorano da to stanje promeni

Drugi zakon – osnovna jednačina dinamike

Promena kretanja proporcionalna je sili koja dejstvuje i vrši se u pravcu sile

$$\vec{F} = m \cdot lim \frac{\vec{V}-\vec{V}_0}{t-t_0} = m \cdot \vec{a}$$

Odnosi se na materijalnu tačku i središte – težište sistema

Materijalna tačka

- U dinamici se pod materijalnom tačkom podrazumeva telo kod koga se pri proučavanju kretanja njegove dimenzije mogu zanemariti

Primeri kada se telo može posmatrati kao materijalna tačka

- Proučavanje kretanja planeta oko sunca – dimenzije planeta u odnosu na njihove putanje su zanemarljive
- Kada se proučava translatorno kretanje – dinamičke jednačine kretanja su iste za sve tačke tela, u kinematici je pokazano da su brzine i ubrzanja tačaka tela koje izvodi translatorno kretanje jednake, tako da se može analizirati dinamika tela kao dinamika materijalne tačke

Primeri kada se telo može posmatrati kao materijalna tačka

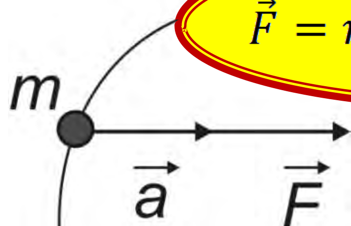
- Proučavanje kretanja tela veoma malih dimenzija, tako da se telo veoma malih dimenzija može smatrati materijalnom tačkom
- Primer kosog hica – dimenzije zrna koje je ispaljeno iz oružja ili oruđa su veoma male u odnosu na visinu leta i domet, pa se telo može smatrati materijalnom tačkom, ako se masa tela nalazi u geometrijskoj tački.

Mora se posmatrati telo, a ne tačka

- Kada se proučava obrtanje planete oko sopstvene ose moraju se uzeti dimenzije, oblik i masa planete čija se rotacija izučava
- Kada se proučava let projektila i opstrujavanje pri letu, mora se proučavati taj projektil sa svojim dimenzijama i oblikom

Osnovna jednačina dinamike

$$\vec{F} = m \cdot lim \frac{\vec{V}-\vec{V}_0}{t-t_0} = m \cdot \vec{a}$$



- Geometrijski posmatrano, jednačina pokazuje da su sila i ubrzanje kolinearni vektori

Masa

$$\vec{F} = m \cdot lim \frac{\vec{V} - \vec{V}_0}{t - t_0} = m \cdot \vec{a}$$

- Masa je pozitivna skalarna veličina koja je karakteristika tela i ona je u klasičnoj dinamici konstantna
- Matematički posmatrano masa je *koeficijent proporcionalnosti* između sile i ubrzanja
- Masa je *mera inertnosti* tela

Masa

$$\vec{G} = m\,\vec{g}$$

- Sva tela na površini Zemlje pri slobodnom padanju imaju ubrzanje

$$g = 9.81\ \frac{m}{s^2}$$

- Merenjem težine – sile može se odrediti masa

$$m = \frac{G}{g}$$

Masa

$$\vec{G} = m\,\vec{g}$$

- Prema Međunarodnom sistemu mernih jedinica mera za masu je kg
- Etalon – masa valjka izrađenog od iridijuma i platine prečnika 39 mm i visine 39 mm Čuva se u Sevru kod Pariza
- Praktično je to masa 1l =1dm^3 vode na 4^{o}C

Jedinica za silu

$$1\,[N] = 1\,[kgm/s^2\,]$$

- Jedinica za dužinu m
- Jedinica za vreme s
- Jedinica za masu kg
- Jedinica za silu je Njutn [N]
- Sila od jednog 1 N je sila koja masi od 1 kg daje ubrzanje od 1 m/s^2
- Primena Međunarodnog SI sistema mera je zakonska obaveza u našoj zemlji

Masa i težina – dva pojma

- Težina je sila kojom zemlja privlači telo
- Masa je karakteristika tela, postoji i u beztežinskom stanju (kada je težina jednaka nuli)

Koordinatni sistem

- Iz kinematike je poznato da se kretanje tela izučava u odnosu na neki koordinatni sistem vezan za neko telo
- Koordinatni sistemi u kojima važe ova dva navedena zakona (prvi i drugi zakon dinamike) – To su nepokretni koordinatni sistemi ili koordinatni sistemi koji se kreću translatorno konstantnom brzinom.

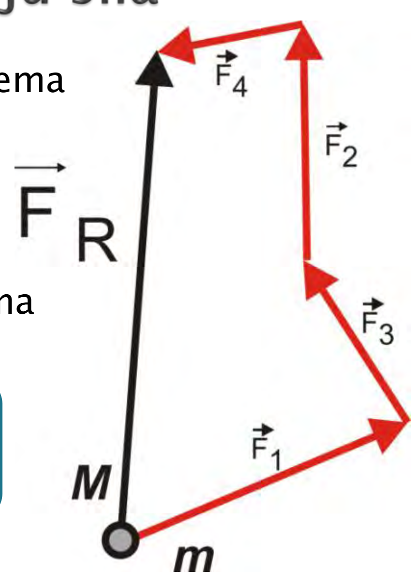
Koordinatni sistem

- U tehničkoj praksi mogu se proučavati problemi vezani za površinu Zemlje
- Kod proučavanja kretanja planeta koordinatni sistem vezan je za Sunce
- Kod proučavanja interkontinentalnih raketa koordinatni sistem je vezan za središte Zemlje
- U okviru ovog kursa jednačine će biti pisane uvek u inercialnom koordinatnom sistemu

Aksioma o slaganju sila

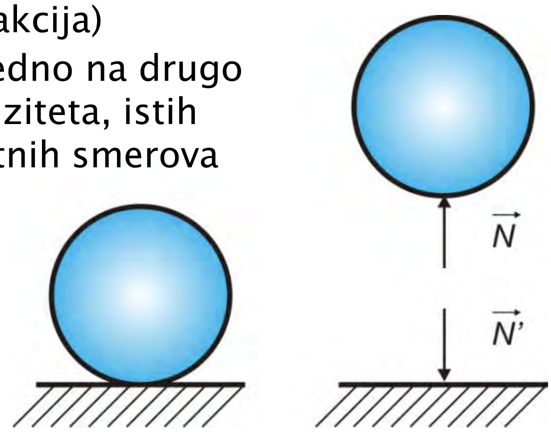
- Rezultanta sistema je prema paralelogramu sila predstavljena završnom stranom poligona
- Rezultanta sistema zamenjuje dejstvo sistema

$$m\,\vec{a} = \vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$$



Treći zakon – zakon jednakosti akcije i reakcije

- Dejstvu (akciji) uvek je jednako protivdejstvo (reakcija)
- Dva tela deluju jedno na drugo silama istih intenziteta, istih pravaca, a suprotnih smerova



Dinamika tačke

- Diferencijalne jednačine kretanja i njihovo integraljenje

Diferencijalne jednačine kretanja

- Dva osnovna zadatka dinamike su:
  - Ako je poznata masa i funkcija promene vektora položaja u zavisnosti od vremena, odrediti rezultujuću silu
  - Drugi zadatak je obrnut – ako je poznata rezultujuća sila koja deluje na tačku i masa tačke, odrediti kretanje tačke

Položaj tačke u prostoru

- Problem definisanja položaja u prostoru vezan je za izbor referentnog inercijalnog koordinatnog sistema vezanog za referentno telo i položaja koordinatnog početka
- Vektor položaja posmatrane tačke definiše njen položaj u prostoru, a kako je vektorska funkcija kojom se definiše vektor položaja i vremenski definisana funkcija, može se napisati:

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

Ubrzanje tačke

- Kako je vektor položaja funkcija koja zavisi od vremena, izvod vektora položaja po vremenu je brzina kretanja tačke

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \dot{\vec{r}}$$

- Drugi izvod vektora položaja po vremenu ili izvod brzine po vremenu je ubrzanje tačke

$$\frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\dot{\vec{r}}(t)}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \vec{a}$$

- Kada na tačku deluje jedna sila na osnovu jednačine dinamike važi

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

Sila je funkcija položaja tačke

- U opštem slučaju sila je posledica položaja tačke, njene brzine i vremena

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \vec{V}, t)}$$

Diferencijalna jednačina kretanja tačke

$$m\,\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

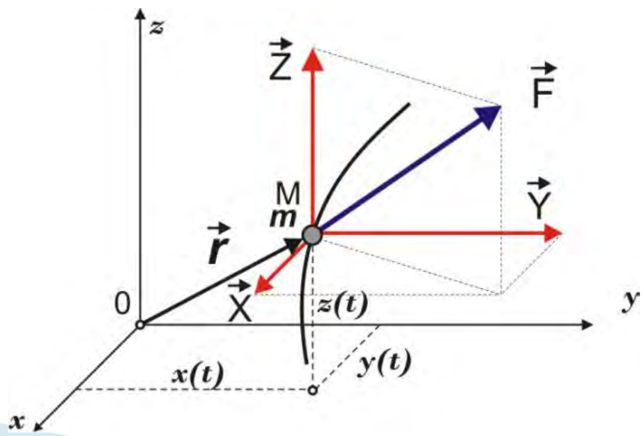
- Ova jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu kretanja tačke napisanu u vektorskom obliku
- To je diferencijalna jednačina drugog reda, u kojoj je nezavisno promenljiva t, a zavisno promenljiva vektor položaja
- Za kretanje u prostoru ova vektorska jednačina može da se napiše kao tri skalarne jednačine

Koordinatni sistemi

- Da bi se definisao vektor položaja u prostoru kako je ranije pokazano, potrebno ga je opisati u nekom od koordinatnih sistema
- Do sada su zbog obima i nivoa kursa u kinematici korišćena samo 2, a i sada u dinamici takođe će biti korišćeni:
  - Dekartov pravougli koordinatni sistem
  - Prirodni koordinatni sistemi

Dekartov koordinatni sistem

- Položaj tačke određen je koordinatama tačke x,y,z koje su promenljive u toku vremena



Dekartov koordinatni sistem

- Prvi izvod po vremenu predstavlja projekcije brzine na ose Dekartovog koordinatnog sistema

$$\dot{x}, \quad \dot{y}, \quad \dot{z}$$

- Drugi izvod predstavlja projekcije ubrzanja na ose Dekartovog koordinatnog sistema

$$\ddot{x}, \quad \ddot{y}, \quad \ddot{z}$$

- Projekcije sile na ose Dekartovog koordinatnog sistema

$$X, \quad Y, \quad Z$$

Vektorska diferencijalna jednačina

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$$

- Vektorska diferencijalna jednačina u Dekartovom koordinatnom sistemu prevodi se u tri skalarne diferencijalne jednačine

$$m\ddot{x} = X$$

$$m\ddot{y} = Y$$

$$m\ddot{z} = Z$$

Diferencijalne jednačine

$$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$$

- Vektorska diferencijalna jednačina u Dekartovom koordinatnom sistemu prevodi se u tri skalarne diferencijalne jednačine odnosno projekcije sile na ose

$$X = X(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$Y = Y(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

$$Z = Z(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t)$$

Diferencijalne jednačine

$$m\ddot{\vec{r}} = \sum \vec{F_i}$$

- Kada se radi o rezultujućoj sili, kao zbiru komponenata, vektorska diferencijalna jednačina se prevodi u skalarne

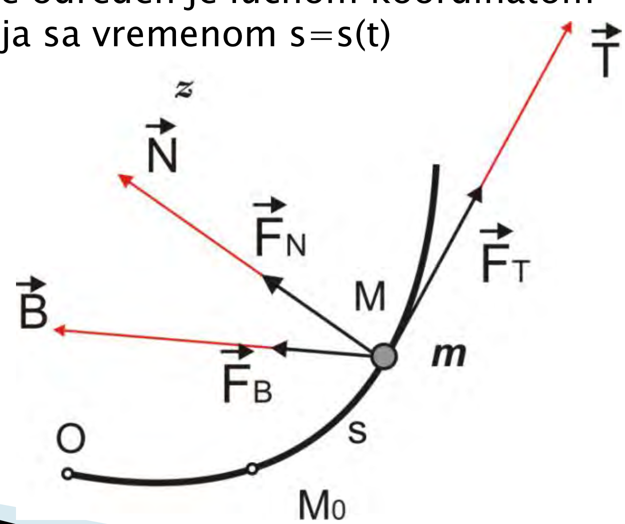
$$m\ddot{x} = \sum X_i$$

$$m\ddot{y} = \sum Y_i$$

$$m\ddot{z} = \sum Z_i$$

Prirodni koordinatni sistem

- Položaj tačke određen je lučnom koordinatom koja se menja sa vremenom s=s(t)



Prirodni koordinatni sistem

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

- Vektorska diferencijalna jednačina se prevodi u tri skalarne diferencijalne jednačine koje su funkcije vremena

$$m\,a_T = F_T$$

$$m\,a_N = F_N$$

$$m\,a_B = F_B$$

Prirodni koordinatni sistem

- Pošto ubrzanja u prirodnom koordinatnom sistemu zavise od lučne koordinate i brzine, to poznati izrazi za ubrzanja glase

$$a_T = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s}$$

$$a_N = \frac{V^2}{R_K} = \frac{\dot{s}^2}{R_K}$$

$$a_B = 0$$

Prirodni koordinatni sistem

- Dobijaju se projekcije sile na pravce tangente i normale. Podsetnik: prirodni koordinatni sistem se menja u zavisnosti od putanje tačke !

$$m\,\ddot{s} = F_T$$

$$m\,\frac{\dot{s}^2}{R_K} = F_N$$

$$F_B = 0$$

Prirodni koordinatni sistem

$$m\,\vec{a} = \sum \vec{F}_i$$

- Kada se radi o rezultujućoj sili kao zbiru komponenata vektorska diferencijalna jednačina se prevodi u skalarne

$$m\,\ddot{s} = \sum F_{iT}$$

$$m\,\frac{V^2}{R_K} = \sum F_{iN}$$

$$\sum F_{iB} = 0$$

1. Poznat vektor položaja – odrediti silu

- Ako je poznata masa m i funkcija promene vektora položaja u zavisnosti od vremena

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

odrediti rezultujuću silu : $\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$

- Na osnovu poznatih zakona kretanja dvostrukim diferenciranjem po vremenu i zamenom u odgovarajućim diferencijalnim jednačinama dobijaju se projekcije rezultujuće sile na koordinatne ose

2. Poznata sila – odrediti kretanje tačke

- Ako je poznata sila F odnosno njene projekcije na ose Dekartovog koordinatnog sistema X,Y,Z

  odrediti kretanje tačke podrazumeva da diferencijalne jednačine drugog reda sa poznatim projekcijama treba dva puta integraliti i tako se dobijaju koordinate tačke

$$m\ddot{x} = X$$

$$m\ddot{y} = Y$$

$$m\ddot{z} = Z$$

2. Poznata sila – odrediti kretanje tačke

$$m\ddot{x} = X$$
$$m\ddot{y} = Y$$
$$m\ddot{z} = Z$$

- Integraljenjem dobija se

$$\dot{x} = \dot{x}(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3)$$
$$\dot{y} = \dot{y}(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3)$$
$$\dot{z} = \dot{z}(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3)$$

2. Poznata sila – odrediti kretanje tačke

$$\dot{x} = \dot{x}(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3)$$
$$\dot{y} = \dot{y}(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3)$$
$$\dot{z} = \dot{z}(x, y, z, t, C_1, C_2, C_3)$$

- Integraljenjem se dobija

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$
$$y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$
$$z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6)$$

Pravolinijsko kretanje tačke

Sila je konstantna –Vertikalni hitac i slobodan pad
Sila zavisi samo od vremena
Sila zavisi od rastojanja – pad sa velike visine
Sila zavisi samo od brzine – slobodan pad u vazduhu

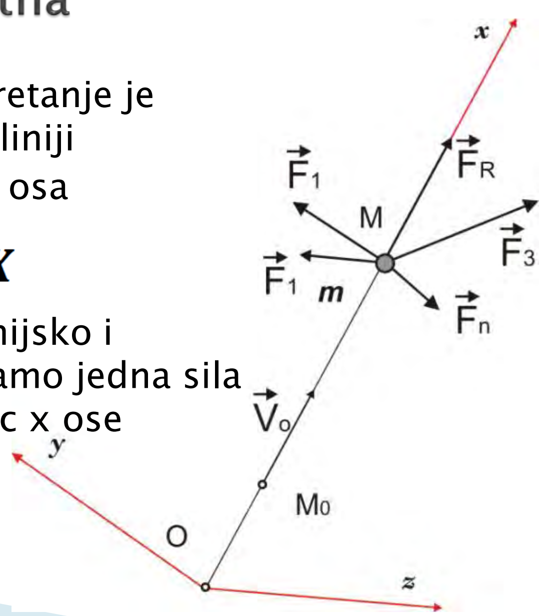
Sila je konstantna

- Najjednostavnije kretanje je kretanje po pravoj liniji
- Pravac kretanja – x osa

$$m\ddot{x} = X$$

- Kretanje je pravolinijsko i rezultanta sila ili samo jedna sila moraju imati pravac x ose

$$Y = 0, \quad Z = 0$$



Sila je konstantna

- Projekcije sila na y i z osu su u posmatranom vremenskom intervalu jednake 0, pa saglasno jednačinama integracijom se dobija

$$\dot{y} = const. = \dot{y}_0$$

$$\dot{z} = const. = \dot{z}_0$$

- Da bi bilo kretanje po x osi brzine moraju biti jednake 0

$$\dot{y} = 0$$

$$\dot{z} = 0$$

Sila je konstantna

- Potreban i dovoljan uslov pravolinijskog kretanja duž x ose može se napisati u vektorskom obliku

$$\vec{F}_R = F_R \cdot \vec{i} \qquad \vec{V}_0 = V_0 \cdot \vec{i}$$

Sila je konstantna

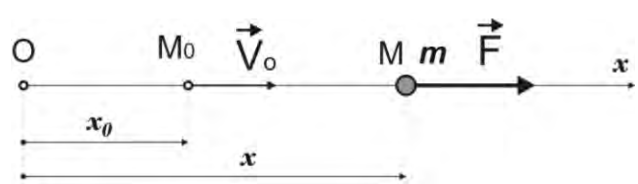
- Diferencijalna jednačina kretanja

$$m\ddot{x} = X$$

- U opštem slučaju kada sila zavisi od položaja tačke, brzine tačke i vremena matematički je složen zadatak pa će biti dati samo pojedini slučajevi kada sila zavisi samo od jednog parametra

Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad

- Sila je konstantna (rezultanta) – do zakona promene brzine i zakona kretanja dolazi se jednostavnom integracijom



$$m\,\ddot{x} = F \qquad\qquad F = const.$$

Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad

$$m\,\ddot{x} = F \qquad F = const.$$

$$\ddot{x} = \frac{F}{m} \qquad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}, \qquad d\dot{x} = \frac{F}{m}dt$$

- Promenljive su razdvojene pa se može integraliti leva i desna strana

$$\int d\dot{x} = \frac{F}{m}\int dt + C_1$$

- Početni uslov za brzinu je da je za $t = 0,\ \ \dot{x} = V_0$

$$V_0 = \frac{F}{m}0 + C_1 \ \rightarrow C_1 = V_0$$

Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad

$$m\,\ddot{x} = F$$

- Dobija se zakon promene brzine

$$\dot{x} = \frac{F}{m}t + V_0$$

- Kako je $\dot{x} = \dfrac{dx}{dt}$ zamenom se dobija

$$dx = \frac{F}{m}tdt + V_0 dt$$

Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad $m\,\ddot{x} = F$

- Integraljenjem

$$\int dx = \frac{F}{m}\int t\,dt + V_0\int dt + C_2$$

- Dobija se

$$x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + V_0 t + C_2$$

Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad $m\,\ddot{x} = F$

- Zamenom za početne uslove $t = 0,\;\; x = x_0$

$$x_0 = \frac{F}{m}0 + V_0 0 + C_2 \rightarrow C_2 = x_0$$

- Dobija se

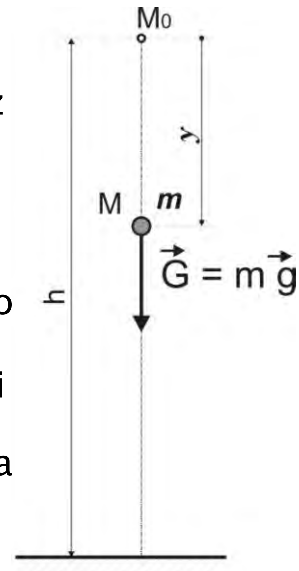
$$x = \frac{F}{m}\frac{t^2}{2} + V_0 t + x_0$$

Zakon jednakoubrzanog kretanja

Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad

- Tačka M pada iz položaja M_0 bez početne brzine, u polju Zemljine teže, sa visine h
- Visina se može smatrati zanemarljivom u odnosu na prečnik Zemlje, pa polje možemo smatrati homogenim
- Ako se zanemari otpor vazduha i izabere vertikalna osa za analizu dobija se diferencijalna jednačina

$$m\,\ddot{y} = mg$$



Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad

$$m\,\ddot{y} = mg$$

- Diferencijalna jednačina kretanja

$$\ddot{y} = g$$

- Integraljenjem se dobija $\dot{y} = gt + C_1;$

$$t = 0, \rightarrow \ \dot{y} = V_0 = 0 \rightarrow C_1 = 0$$

- Ponovnim integraljenjem $\dot{y} = gt$

$$y = g\frac{t^2}{2} + C_2$$

$$t = 0, \rightarrow \ y = 0 \rightarrow C_2 = 0$$

Sila je konstantna – vertikalni hitac i slobodan pad

- Jednačina kretanja je

$$y = g\frac{t^2}{2}$$

- Iz jednačine se dobija zavisnost brzine od položaja

$$\dot{y} = \sqrt{2g\,y}$$

- Vreme padanja tačke sa visine h

$$T = \sqrt{\frac{2\,h}{g}}$$