

## Ravni nosači

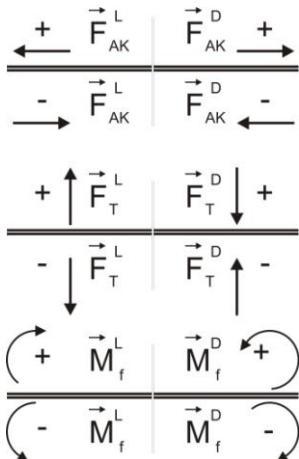
- Konvencija o znacima opterećenja grede
- Prosti nosači i osnovni statički dijagrami

## Statički dijagrami

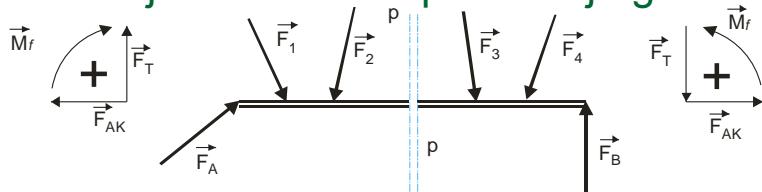
Konvencija o znacima opterećenja  
grede

## Konvencija o znacima za opterećenja grede

Levo od preseka      Desno od preseka



## Konvencija o znacima opterećenja grede



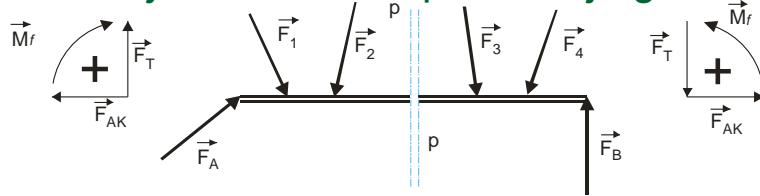
$$+\uparrow \vec{F}_T^L = +\uparrow \sum Y_i^L$$

$$+\downarrow \vec{F}_T^D = +\downarrow \sum Y_i^D$$

- Transverzalna sila se definije kao algebarski zbir svih spoljašnjih sila upravnih na osu grede koje deluju sa leve strane od preseka p-p

- Transverzalna sila se definije kao algebarski zbir svih spoljašnjih sila upravnih na osu grede koje deluju sa desne strane od preseka p-p

## Konvencija o znacima opterećenja grede



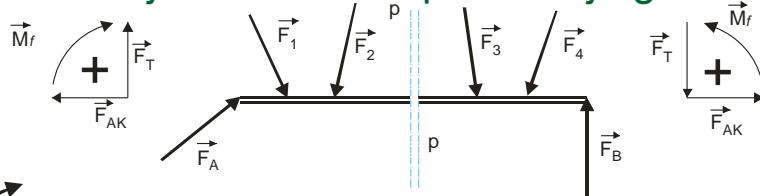
$$+\leftarrow \vec{F}_{AK}^L = +\leftarrow \sum Z_i^L$$

- Aksijalna sila se definije kao algebarski zbir svih spoljašnjih sila koje deluju u pravcu ose grede sa leve strane od preseka p-p

$$+\rightarrow \vec{F}_{AK}^D = +\rightarrow \sum Z_i^D$$

- Aksijalna sila se definije kao algebarski zbir svih spoljašnjih sila koje deluju u pravcu ose grede sa desne strane od preseka p-p

## Konvencija o znacima opterećenja grede



$$+M_f^D = +\sum M_i^D$$

$$+M_f^L = +\sum M_i^L$$

- Moment savijanja sa leve strane se definije kao algebarski zbir svih momenata spoljašnjih sila i momenata koji deluju na gredu sa leve strane od preseka p-p

- Moment savijanja sa desne strane se definije kao algebarski zbir svih momenata spoljašnjih sila i momenata koji deluju na gredu sa desne strane od preseka p-p

# Prosti nosači – statički dijagrami

Prosta greda

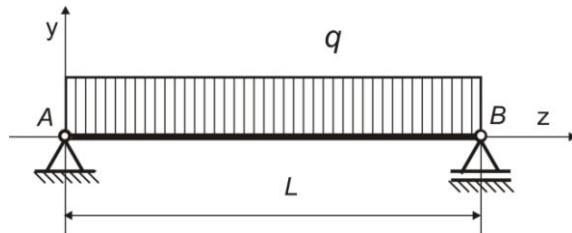
Konzola

## Prosti nosači – statički dijagrami

Potrebno je odrediti:

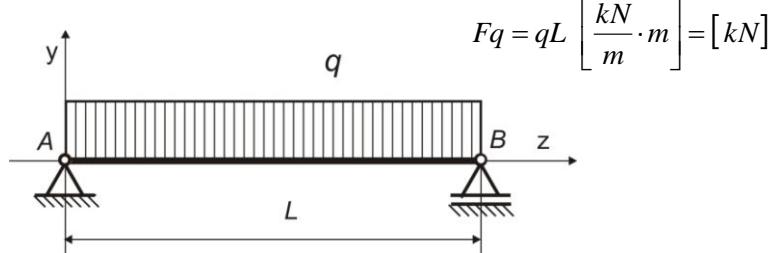
- Otpore oslonaca
- Dijagram promene aksijalne sile
- Dijagram transverzalne sile
- Dijagram momenta savijanja

## Prosta greda opterećena jednakom podjeljenim (kontinualnim) opterećenjem



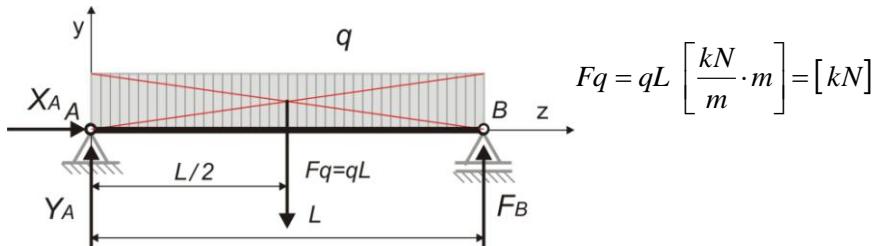
- Elementi proste grede
- Raspon grede obeležen sa  $L$
- Nepokretan oslonac obeležen sa A
- Pokretan oslonac obeležen sa B
- Kontinualno opterećenje obeleženo sa  $q = \text{const}$  N/m

## Prosta greda opterećena jednakom podjeljenim (kontinualnim) opterećenjem **određivanje otpora oslonaca**



- Opterećenje grede se može predstaviti koncentrisanom silom na sredini kontinualnog opterećenja
- Koncentrisana sila predstavlja proizvod dužine opterećenog grednog nosača i kontinualnog opterećenja

Prosta greda opterećena jednako podeljenim (kontinualnim) opterećenjem **određivanje otpora oslonaca**

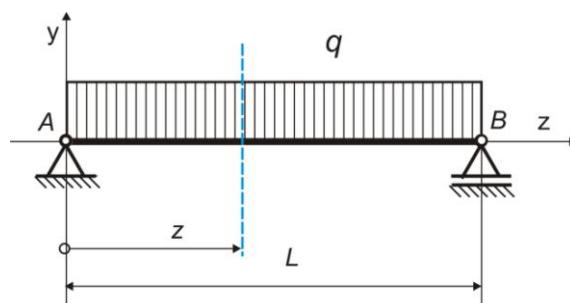


$$\sum X_i = X_A = 0 \quad X_A = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + F_B - Fq = 0 \quad Y_A = F_q - F_B$$

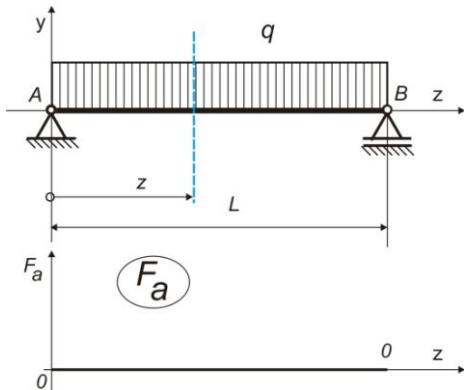
$$\sum M_A = F_B L - F_q \frac{1}{2} L = 0 \quad F_B = \frac{1}{2} F_q = \frac{1}{2} q \cdot L$$

Prosta greda opterećena jednako podeljenim (kontinualnim) opterećenjem **Podela na polja**



- Između otpora oslonaca nema skokovitih promena pa ceo raspon grede čini jedno polje

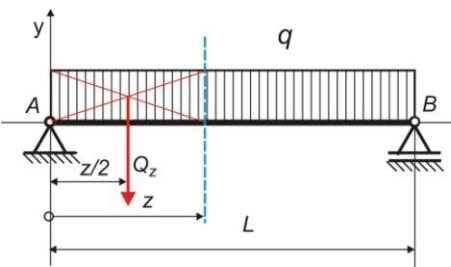
Prosta greda opterećena jednako podeljenim (kontinualnim) opterećenjem **dijagram aksijalne sile**



$$X_A = 0$$

- Nema aksijalne sile pa je dijagram samo osnovna linija - osa

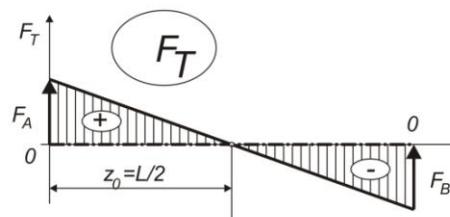
Prosta greda opterećena jednako podeljenim (kontinualnim) opterećenjem **Dijagram transverzalne sile**



$$F_{Tz}^L = F_A - qz = \frac{1}{2}Q - qz = \frac{1}{2}qL - qz$$

Zavisnost transverzalne sile od koordinate z preseka u kom se izračunava

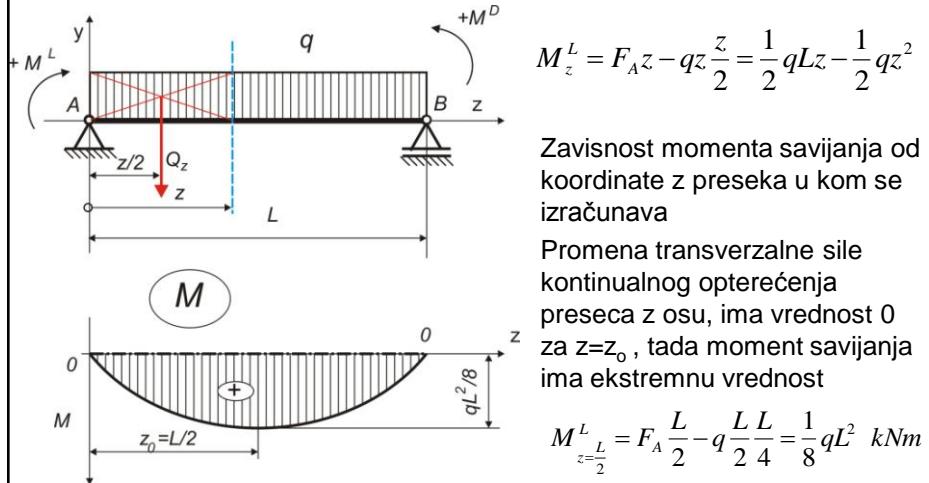
Transverzalna sila ima vrednost 0 za  $z=z_0$



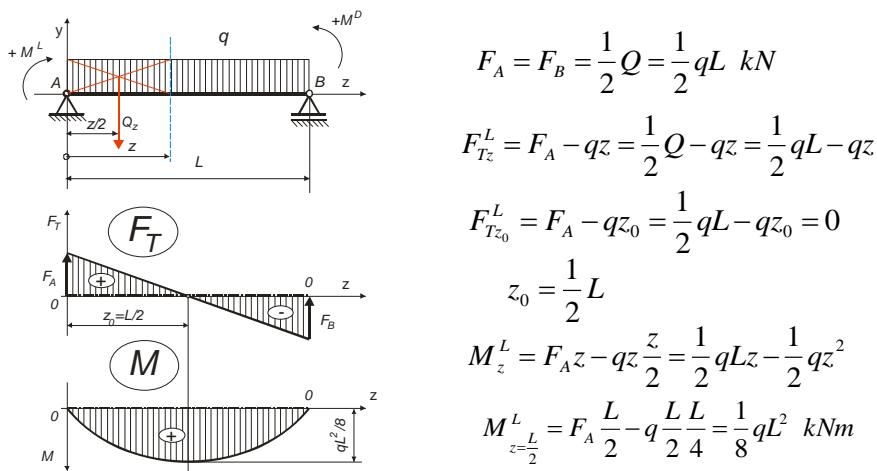
$$F_{Tz_0}^L = F_A - qz_0 = \frac{1}{2}qL - qz_0 = 0$$

$$z_0 = \frac{1}{2}L$$

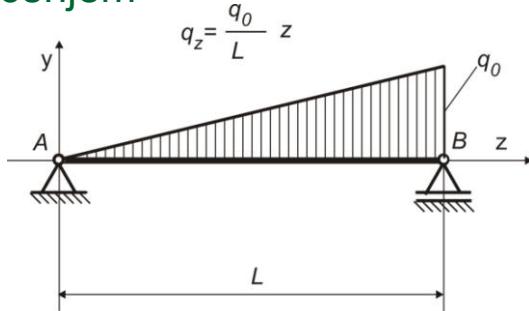
Prosta greda opterećena jednako podeljenim (kontinualnim) opterećenjem **Dijagram momenta savijanja**



Prosta greda opterećena jednako podeljenim (kontinualnim) opterećenjem **objedinjen prikaz karakterističnih dijagrama**

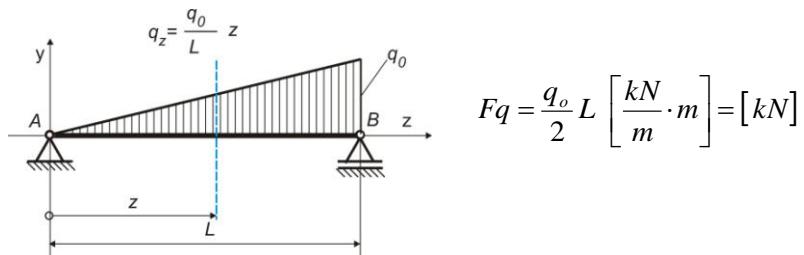


## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem



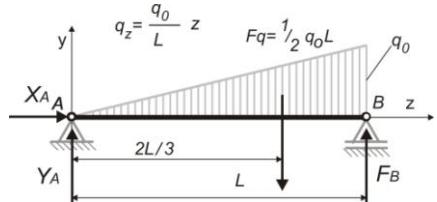
- Elementi proste grede
- Raspon grede obeležen sa L
- Nepokretan oslonac obeležen sa A
- Pokretan oslonac obeležen sa B
- Trouglasto podeljeno opterećenje q = q<sub>0</sub>/L z N/m

## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem određivanje otpora oslonaca



- Opterećenje grede se može predstaviti koncentrisanom silom koja deluje na dve trećine dužine trouglastog opterećenja
- Koncentrisana sila predstavlja polovinu proizvoda dužine opterećenog grednog nosača q<sub>0</sub> vrednosti trouglastog opterećenja

## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem određivanje otpora oslonaca



$$Fq = \frac{1}{2} q_0 L = \frac{1}{2} q_0 L \text{ kN}$$

$$\sum X_i = X_A = 0$$

$$X_A = 0$$

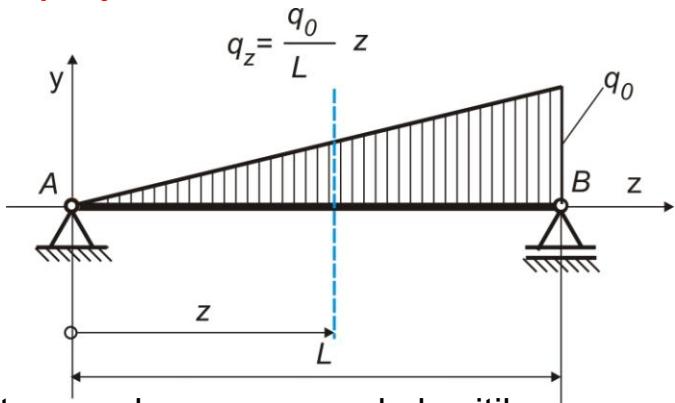
$$\sum Y_i = Y_A + F_B - Fq = 0$$

$$Y_A = F_A = \frac{1}{3} Fq = \frac{1}{6} q_0 L$$

$$\sum M_A = F_B L - F_q \frac{2}{3} L = 0$$

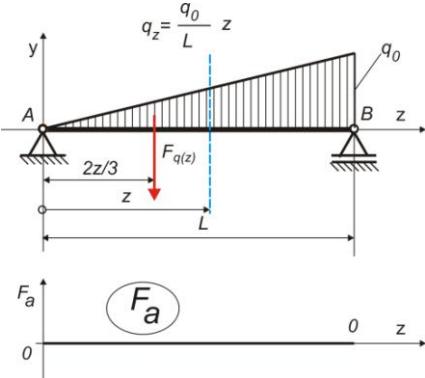
$$F_B = \frac{2}{3} F_q = \frac{1}{3} q_0 L$$

## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem Podela na polja



- Između otpora oslonaca nema skokovitih promena pa ceo raspon grede čini jedno polje

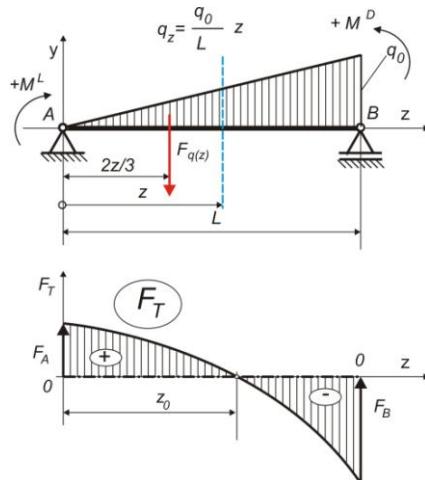
## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem dijagram aksijalne sile



$$X_A = 0$$

- Nema aksijalne sile pa je dijagram samo osnovna linija - osa

## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem Dijagram transverzalne sile



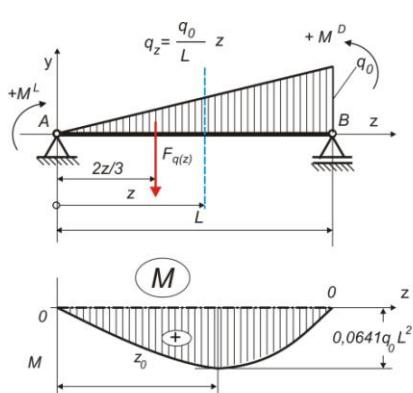
$$F_{Tz}^L = F_A - \frac{1}{2} q_z z = \frac{1}{6} q_0 L - \frac{1}{2} \frac{q_0}{L} z^2$$

- Zavisnost transverzalne sile od koordinate  $z$  preseka u kom se izračunava
- Transverzalna sila ima vrednost 0 za  $z=z_0$

$$F_{Tz_0}^L = \frac{1}{6} q_0 L - \frac{1}{2} \frac{q_0}{L} z_0^2 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem

### Dijagram momenta savijanja

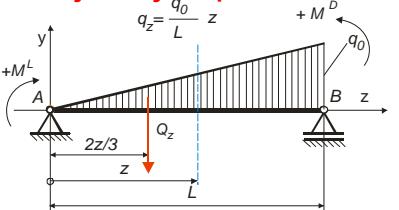


$$M_z^L = F_A z - \frac{1}{2} q_z z \frac{z}{3} = \frac{1}{6} q_0 L z - \frac{1}{6} \frac{q_0}{L} z^3$$

- Zavisnost momenta savijanja od koordinate z preseka u kom se izračunava
- Promena transverzalne sile kontinualnog opterećenja preseca z osu, ima vrednost 0 za  $z=z_0$ , tada moment savijanja za imaju ekstremnu vrednost

$$M_{z_0}^L = \frac{\sqrt{3}}{27} q_0 L^2 = 0.0641 q_0 L^2 \text{ kNm}$$

## Prosta greda opterećena trouglasto podeljenim opterećenjem objedinjen prikaz karakterističnih dijagonala



$$F_q = \frac{1}{2} q_0 L = \frac{1}{2} q_0 L \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = F_A + F_B - \frac{1}{2} q_0 L = 0$$

$$\sum M_A = F_B L - Q \frac{2}{3} L = F_B - \frac{1}{2} q_0 L \frac{2}{3} L = 0$$

$$F_B = \frac{2}{3} F_q = \frac{1}{3} q_0 L$$

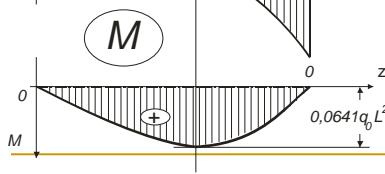
$$F_A = \frac{1}{3} F_q = \frac{1}{6} q_0 L$$

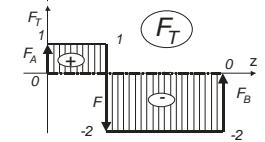
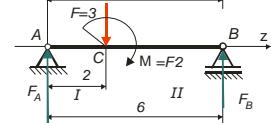
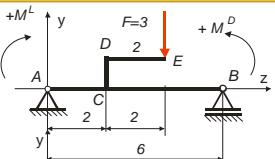
$$F_{Tz}^L = F_A - \frac{1}{2} q_0 z = \frac{1}{6} q_0 L - \frac{1}{2} \frac{q_0}{L} z^2$$

$$F_{Tz_0}^L = \frac{1}{6} q_0 L - \frac{1}{2} \frac{q_0}{L} z_0^2 = 0 \Rightarrow z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3} L$$

$$M_z^L = F_A z - \frac{1}{2} q_z z \frac{z}{3} = \frac{1}{6} q_0 L z - \frac{1}{6} \frac{q_0}{L} z^3$$

$$M_{z_0}^L = \frac{\sqrt{3}}{27} q_0 L^2 = 0.0641 q_0 L^2 \text{ kNm}$$





### Prosta greda opterećena vertikalnom ekscentričnom silom

$$\sum X_i = X_A = 0$$

$$\sum Y_i = F_A + F_B - F = 0$$

$$\sum M_i = F_B \cdot 6 - F \cdot 2 - M_F = 0$$

$$M_F = F \cdot 2 = 6$$

$$F_A = 1 \text{ kN} \quad F_B = 2 \text{ kN}$$

$$M_{z=0}^L = F_A \cdot 0 = 0$$

$$M_{z=2}^L = F_A \cdot 2 = 1 \cdot 2 = 2$$

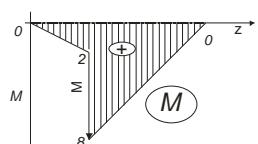
$$M^L = F_A \cdot z = 1 \cdot z$$

Polje I  $0 < z < 2$

$$F_T^L = F_A = 1$$

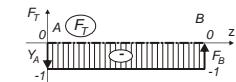
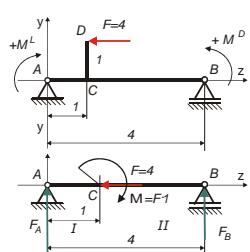
$$F_T^L = F_A - F = 1 - 3 = -2$$

$$M^L = F_A \cdot z + M_F - F(z-2) = 1 \cdot z + 6 - 3(z-2)$$



$$M_{z=2}^L = F_A \cdot 2 + 6 = 1 \cdot 2 + 6 = 8$$

$$M_{z=6}^L = F_A \cdot 2 + M_F - 3 \cdot 4 = 1 \cdot 6 + 6 - 12 = 0$$



### Prosta greda opterećena horizontalnom ekscentričnom silom

$$\sum Z_i = -Z_A + F = 0 \Rightarrow Z_A = F = 4 \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = -Y_A + F_B = 0 \Rightarrow Y_A = F_B$$

$$\sum M_i = -F_B \cdot 4 - M_F = -4F_B - 1 \cdot 4 = 0 \Rightarrow$$

$$F_B = 1 \text{ kN} \Rightarrow Y_A = 1 \text{ kN}$$

$$M_F = F \cdot 1 = 4 \cdot 1 = 4 \text{ kNm}$$

$$F_A = \sqrt{Z_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{4^2 + 1^2} = \sqrt{17} \text{ kN}$$

Polje I  $0 < z < 1$

$$F_T^L = -Y_A = -1$$

$$F_{AK}^L = Z_A = 4$$

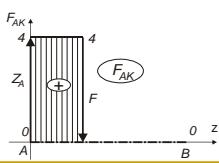
Polje II  $1 < z < 4$

$$F_T^L = -Y_A = -1$$

$$F_{AK}^L = 0$$

$$M^L = -F_A \cdot z = -1 \cdot z$$

$$M^L = -Y_A \cdot z + M_F = 1 \cdot z + 4$$

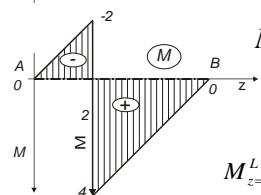
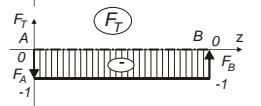
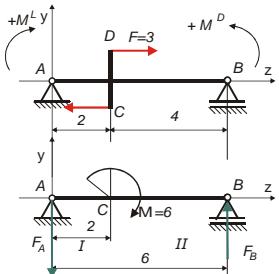


$$M_{z=0}^L = -Y_A \cdot 0 = 0$$

$$M_{z=1}^L = -Y_A \cdot 1 + 4 = -1 \cdot 1 + 4 = 3$$

$$M_{z=4}^L = -Y_A \cdot 4 + M_F = -1 \cdot 4 + 4 = 0$$

### Prosta greda opterećena spregom sila



$$\sum Y_i = -F_A + F_B = 0 \Rightarrow F_A = F_B$$

$$\sum M_i = F_B \cdot 6 - M_F = 6F_B - 2 \cdot 3 = 0 \Rightarrow$$

$$F_B = 1 \text{ kN} \Rightarrow F_A = 1 \text{ kN}$$

$$M_F = F \cdot 2 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kNm}$$

Polje I  $0 < z < 1$

$$F_T^L = -Y_A = -1$$

$$M^L = -F_A \cdot z = -1 \cdot z$$

$$M_{z=0}^L = -Y_A \cdot 0 = 0$$

$$M_{z=2}^L = -Y_A \cdot 2 = -1 \cdot 2 = -2$$

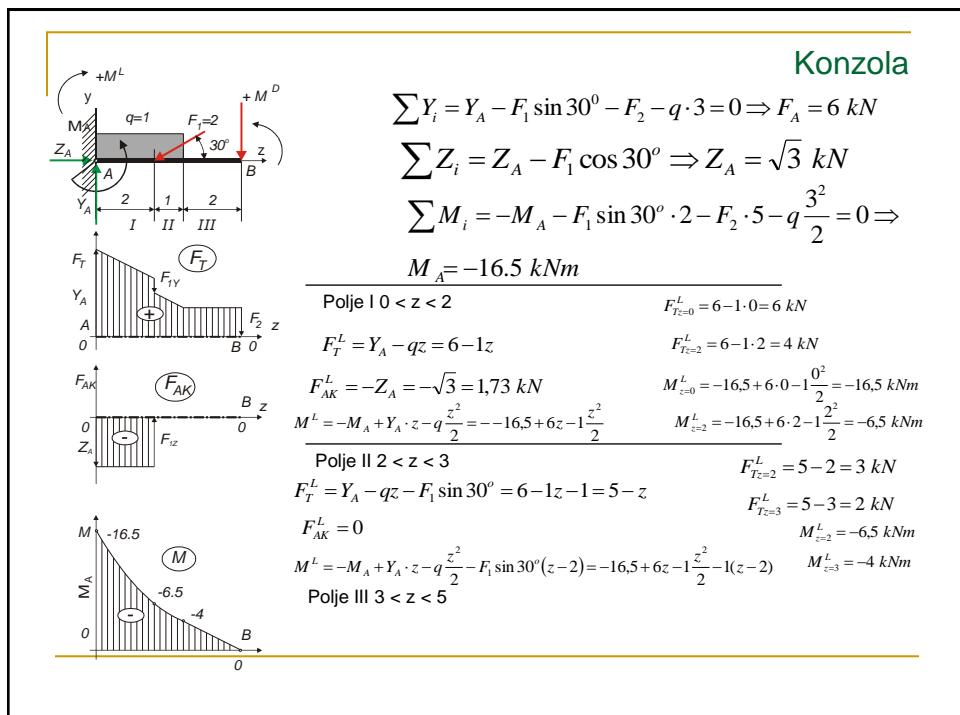
$$M^L = -Y_A \cdot z + M_F = 1 \cdot z + 6$$

Polje II  $1 < z < 4$

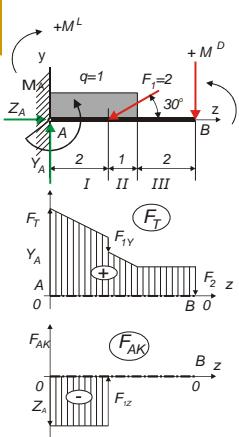
$$F_T^L = -Y_A = -1$$

$$M_{z=2}^L = -Y_A \cdot 2 + 6 = -1 \cdot 2 + 6 = 4$$

$$M_{z=6}^L = -Y_A \cdot 6 + M_F = -1 \cdot 6 + 6 = 0$$



## Konzola



$$\sum Y_i = Y_A - F_1 \sin 30^\circ - F_2 - q \cdot 3 = 0 \Rightarrow F_A = 6 \text{ kN}$$

$$\sum Z_i = Z_A - F_1 \cos 30^\circ \Rightarrow Z_A = \sqrt{3} \text{ kN}$$

$$\sum M_i = -M_A - F_1 \sin 30^\circ \cdot 2 - F_2 \cdot 5 - q \frac{3^2}{2} = 0 \Rightarrow$$

$$M_A = -16.5 \text{ kNm}$$

Polje III  $3 < z < 5$

$$F_T^L = Y_A - q \cdot 3 - F_1 \sin 30^\circ = 6 - 3 - 1 = 2 \quad F_{Tz=3}^L = 2 \text{ kN} \quad M_{z=5}^L = 0 \text{ kNm}$$

$$F_{AK}^L = 0 \quad F_{Tz=5}^L = 2 \text{ kN} \quad M_{z=3}^L = -4 \text{ kNm}$$

$$M^L = -M_A + Y_A \cdot z - q \cdot 3(z-1,5) - F_1 \sin 30^\circ (z-2) = -16,5 + 6z - 3z + 4,5 - 1(z-2)$$

Moguće je pisati i izraze sa desne strane

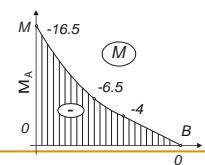
$$F_T^D = F_2$$

$$F_{AK}^D = 0$$

$$M^D = -F_2(5-z)$$

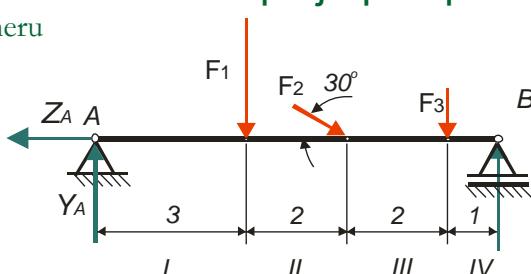
Polje III  $0 < z < 1$

$$M^D = -F_2 z_1$$



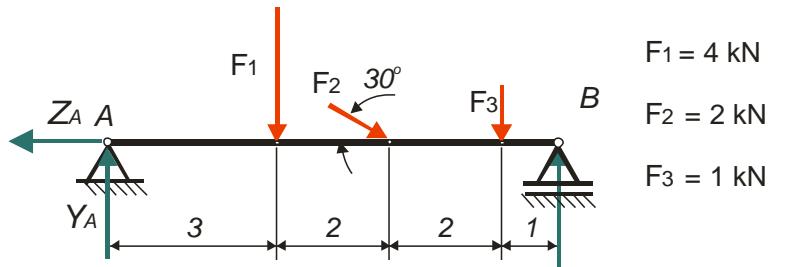
## Podela nosača na polja po opterećenjima

na primeru



- Kao jedno polje izdvajamo deo nosača kod koga nema skokovitih promena opterećenja
- Na primeru
- Polje I  $0 < z < 3$
- Polje II  $3 < z < 5$
- Polje III  $5 < z < 7$
- Polje IV  $7 < z < 8$

## Analitičko određivanje otpora oslonaca



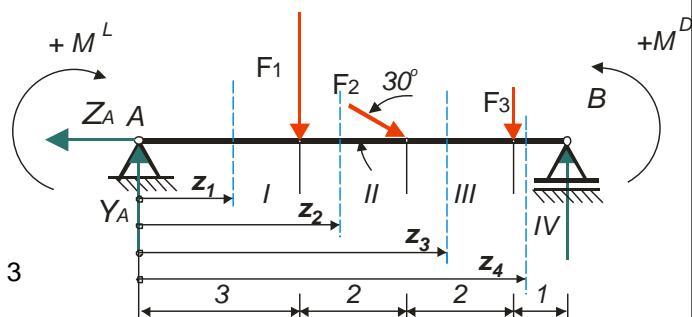
$$\sum Z_i = -Z_A + F_2 \cos 30^\circ = 0 \quad Z_A = \sqrt{3} \text{ kN}$$

$$\sum Y_i = Y_A + F_B - F_1 - F_2 \sin 30^\circ - F_3 = 0 \quad Y_A = 3 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = F_B \cdot 8 - F_1 \cdot 3 - F_2 \sin 30^\circ \cdot 5 - F_3 \cdot 7 = 0 \quad F_B = 3 \text{ kN}$$

$$F_A = \sqrt{Y_A^2 + Z_A^2} \quad \cos \alpha_A = \frac{Z_A}{F_A} = -0,5 \quad F_A = 2 \cdot \sqrt{3} \text{ kN}$$

## Analitički izrazi za karakteristične veličine



- Polje I  $0 < z < 3$

$F_T = Y_A$

$F_{ak} = Z_A$

$M = Y_A z$

- Polje II  $3 < z < 5$

$F_T = Y_A - F_1$

$F_{ak} = Z_A$

$M = Y_A z - F_1(z-3)$

Izrazi su pisani za gredu posmatranu sa leve strane

Pozitivna transverzalna sila – naviše

Pozitivna aksijalna sila – istezanje

Pozitivan moment – u smeru kazaljke na satu

## Analitički izrazi za karakteristične veličine

Oslonac A

$$F_T = Y_A \text{ počinje iz } 0$$

$$F_{ak} = Z_A$$

$$M = 0$$

■ Polje III  $5 < z < 7$

$$F_T = Y_A - F_1 - 0,5F_2$$

$$F_{ak} = 0$$

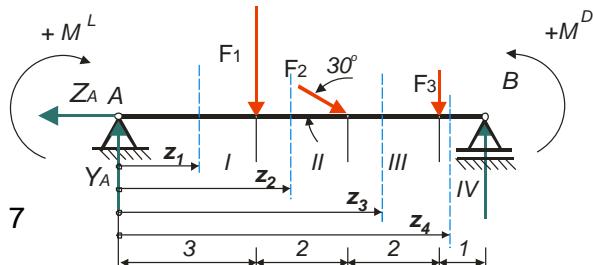
$$M = Y_A z - F_1(z-3) - 0,5F_2(z-5)$$

■ Polje IV  $7 < z < 8$

$$F_T = Y_A - F_1 - 0,5F_2 - F_3$$

$$F_{ak} = 0$$

$$M = Y_A z - F_1(z-3) - 0,5F_2(z-5) - F_3(z-7)$$



Oslonac B

$$F_T = Y_B \text{ zatvara u } 0$$

$$F_{ak} = 0$$

$$M = 0$$

## Statički dijagram transverzalne sile

■ U izrazima zamene se brojne vrednosti

Oslonac A

$$F_T = Y_A = 3 \text{ kN}$$

■ Polje I  $0 < z < 3$

$$F_T = Y_A = 3 \text{ kN}$$

■ Polje II  $3 < z < 5$

$$F_T = Y_A - F_1 = 3 - 4 = -1 \text{ kN}$$

■ Polje III  $5 < z < 7$

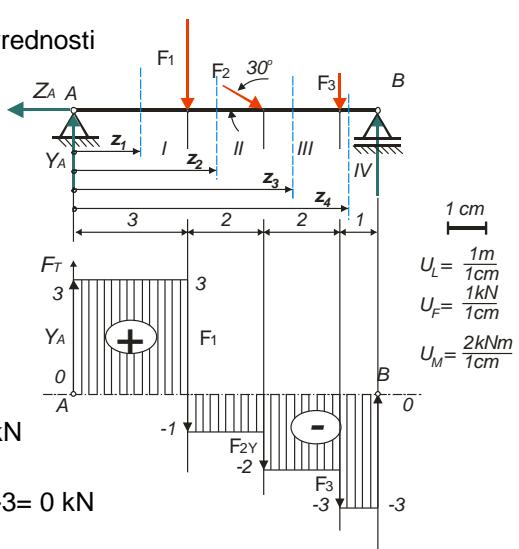
$$F_T = Y_A - F_1 - 0,5F_2 = 3 - 4 - 1 = -2 \text{ kN}$$

■ Polje IV  $7 < z < 8$

$$F_T = Y_A - F_1 - 0,5F_2 - F_3 = 3 - 4 - 1 - 1 = -3 \text{ kN}$$

Oslonac B

$$F_T = Y_A - F_1 - 0,5F_2 - F_3 + F_B = 3 - 4 - 1 - 1 + 3 = 0 \text{ kN}$$



## Statički dijagram aksijalne sile

- U izrazima zamene se brojne vrednosti

Oslonac A

$$F_{Ak} = Z_A = 1.73 \text{ kN}$$

- Polje I  $0 < z < 3$

$$F_{Ak} = Z_A = 1.73 \text{ kN}$$

Polje II  $3 < z < 5$

$$F_{Ak} = Z_A = 1.73 \text{ kN}$$

- Polje III  $5 < z < 7$

$$F_{Ak} = Z_A - F_2 \cos 30^\circ =$$

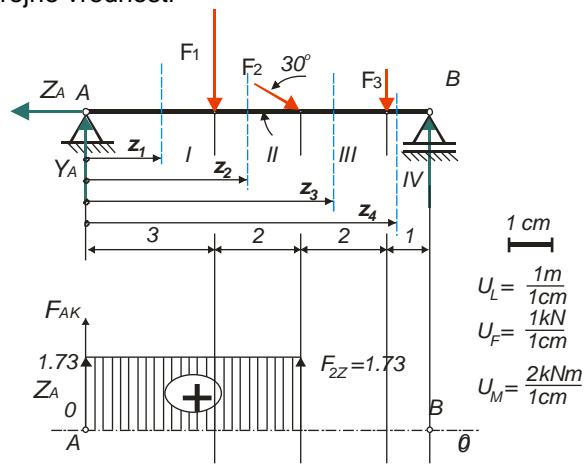
$$1.73 - 1.73 = 0 \text{ kN}$$

- Polje IV  $7 < z < 8$

$$F_{Ak} = 0 \text{ kN}$$

Oslonac B

$$F_{Ak} = 0 \text{ kN}$$



## Statički dijagram momenta savijanja

- Polje I  $0 < z < 3$

$$M=Y_A z=3z$$

$$z=0 \quad M=0 \text{ kNm}$$

$$z=3 \quad M=3 \cdot 3=9 \text{ kNm}$$

- Polje II  $3 < z < 5$

$$M=Y_A z-F_1(z-3)=12z$$

$$z=3 \quad M=12 \cdot 3=9 \text{ kNm}$$

$$z=5 \quad M=12 \cdot 5=7 \text{ kNm}$$

- Polje III  $5 < z < 7$

$$M=Y_A z-F_1(z-3)-0.5F_2(z-5)=17-2z$$

$$z=5 \quad M=17-10=7 \text{ kNm}$$

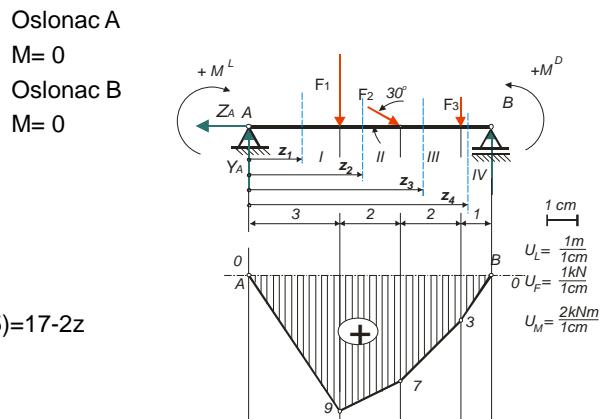
$$z=7 \quad M=17-14=3 \text{ kNm}$$

- Polje IV  $7 < z < 8$

$$M=Y_A z-F_1(z-3)-0.5F_2(z-5)-F_3(z-7)=24-3z$$

$$z=7 \quad M=24-21=3 \text{ kNm}$$

$$z=8 \quad M=24-24=0 \text{ kNm}$$



## Statički dijagram momenta savijanja

- Za Polje III  $1 < z < 3$  sa desne strane

$$M=Y_B z - F_3(z-1) = 2z+1$$

$$z=1 \quad M=3 \text{ kNm}$$

$$z=3 \quad M=2 \cdot 3 + 1 = 7 \text{ kNm}$$

- Polje IV  $0 < z < 1$

$$M=Y_B z = 3z$$

$$z=0 \quad M=0 \text{ kNm}$$

$$z=1 \quad M=3 \cdot 1 = 3 \text{ kNm}$$

Polje III  $5 < z < 7$

$$M=Y_A z - F_1(z-3) - 0.5F_2(z-5) = 17 - 2z$$

$$z=5 \quad M=17 - 10 = 7 \text{ kNm}$$

$$z=7 \quad M=17 - 14 = 3 \text{ kNm}$$

- Polje IV  $7 < z < 8$

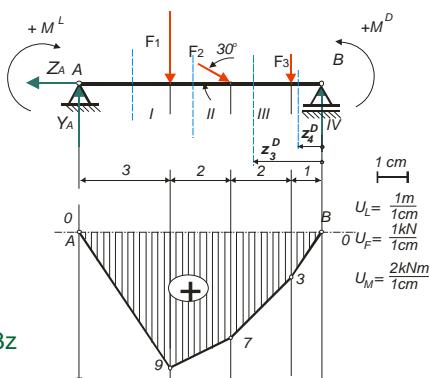
$$M=Y_A z - F_1(z-3) - 0.5F_2(z-5) - F_3(z-7) = 24 - 3z$$

$$z=7 \quad M=24 - 21 = 3 \text{ kNm}$$

$$z=8 \quad M=24 - 24 = 0 \text{ kNm}$$

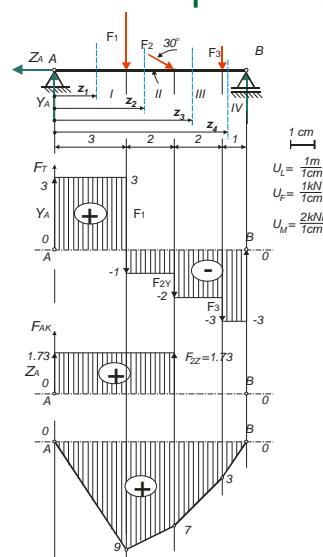
Oslonac A  $M=0$

Oslonac B  $M=0$

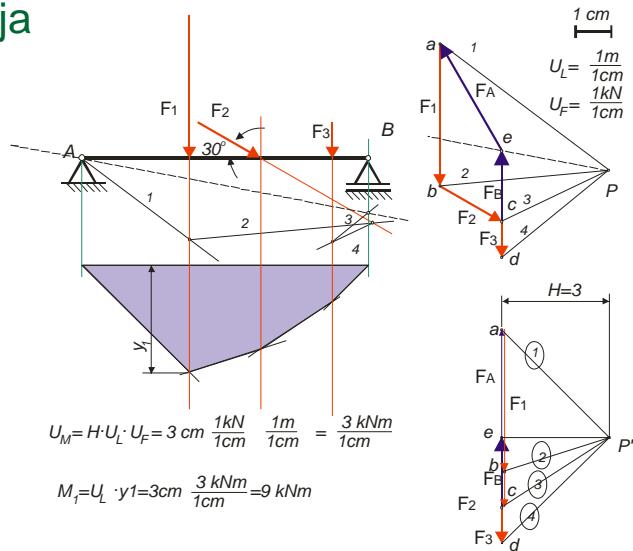


## Statički dijagrami rešavane proste grede

Statički dijagrami prikazuju se objedinjeno jedan ispod drugog



## Grafičko određivanje dijagrama momenta savijanja



informativno

## Uputstvo za rešavanje zadataka

- Analizirati posmatrani nosač i dovesti sva opterećenja na sam nosač – eliminisati posredno opterećenje
- Odrediti otpore oslonaca (pri analitičkom rešavanju otpora oslonaca voditi računa o broju elemenata koji opterećuju nosač i broju članova u napisanim jednačinama)
- Proveriti otpore oslonaca
- Podeliti nosač na polja - delove grede - konzole gde nema skokovitih promena opterećenja
- Napisati izraze za transverzalnu silu, aksijalnu silu i moment savijanja po poljima
- Nacrtati statičke dijagrame
- U dijagramima proveriti da li prelomne tačke odgovaraju opterećenjima