

# Trenje klizanja i kotrljanja

Zakoni trenja klizanja

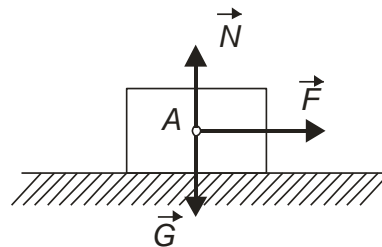
Reakcija hrapave veze

Konus trenja – trougao trenja

Trenje užeta o hrapavu cilindričnu površ

Trenje kotrljanja

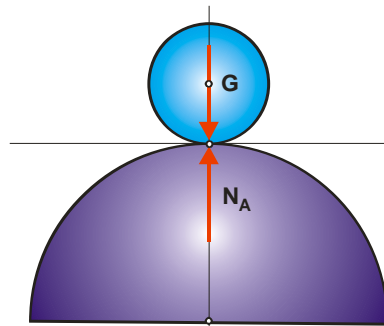
## Zakoni trenja klizanja



- Reakcija veze dodirnih površi - glatke površi normalna na ravan idealno glatke ravne površi
- Ako na telo deluje beskrajno mala sila  $F$  ona će ga pomeriti

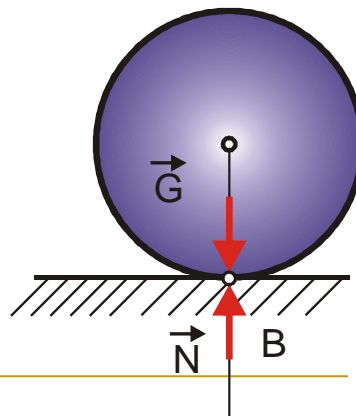
## Veze i reakcije veza GLATKA POVRŠ I GLATKI OSLODAC

- Glatka površ u statici je površina bez trenja koja se ne protivi silom ukoliko telo kliza po njoj
- Reakcija veze je **USMERENA PO ZAJEDNIČKOJ NORMALI NA DODIRNU POVRŠ**



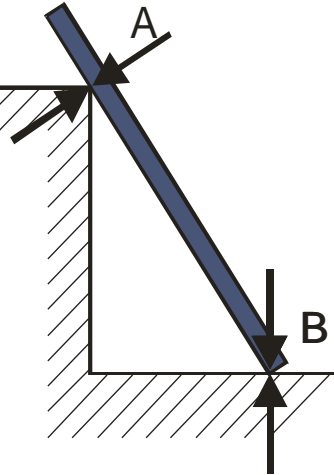
## Veze i reakcije veza GLATKA POVRŠ I GLATKI OSLODAC

- Glatka površ u statici je površina bez trenja koja se ne protivi silom ukoliko telo kliza po njoj
- Reakcija veze je **USMERENA PO ZAJEDNIČKOJ NORMALI NA DODIRNU POVRŠ**



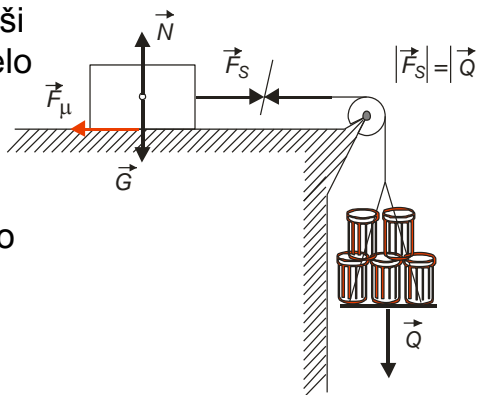
## Veze i reakcije veza GLATKA POVRŠ I GLATKI OSLODAC

- Glatka površ u statici je površina bez trenja koja se ne protivi silom ukoliko telo kliza po njoj
- Reakcija veze je **USMERENA PO ZAJEDNIČKOJ NORMALI NA DODIRNU POVRŠ**

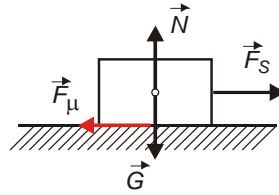


## Trenje klizanja pri mirovanju

- Kod realnih hrapavih površi sila potrebna da pomeri telo nije neznčajna
- Eksperiment pokazuje da dok se ne dostigne neka vrednost sile, neće doći do pomeranja



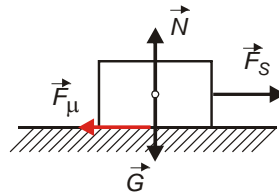
## Sila trenja klizanja



- Pri pomeranju jednog tela po drugom u dodirnoj površi nastaje sila trenja  $\vec{F}_\mu$
- Sila trenja može imati vrednosti od 0 do  $F_{gr}$  – granične sile trenja
- Granična sila trenja klizanja ima intenzitet jednak proizvodu normalne sile i statičkog koeficijenta trenja

$$F_{\mu\max} = F_{gr} = \mu_0 \cdot N$$

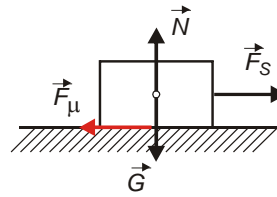
## Sila trenja klizanja



- Sila trenja klizanja  $\vec{F}_\mu$  ima pravac tangente u tački dodira dva tela
- Sila trenja klizanja usmerena je u suprotnom smeru od smera u kome aktivne sile teže da pomere telo

$$F_{\mu\max} = F_{gr} = \mu_0 \cdot N$$

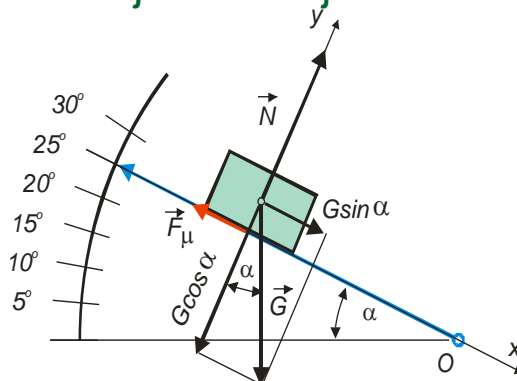
## Sila trenja klizanja



- Sila trenja klizanja  $F_{\mu}$  u mirovanju uvek je jednaka smičućoj sili koja teži da pomeri telo
- Sila trenja klizanja definiše se Kulonovim zakonima i određuje se iz uslova ravnoteže
- Njen intenzitet u graničnom slučaju **ne može** biti veći od

$$F_{\mu} \leq F_{\mu \max} = F_{gr} = \mu_0 \cdot N$$

## Eksperimentalno određivanje statičkog koeficijenta trenja



$$\Sigma X_i = G \sin \alpha - F_{\mu} = 0$$

$$\Sigma Y_i = N - G \cos \alpha = 0$$

$$F_{\mu} = G \sin \alpha$$

$$N = G \cos \alpha$$

$$\text{kako je } F_{\mu} \leq F_{gr} = \mu_0 N$$

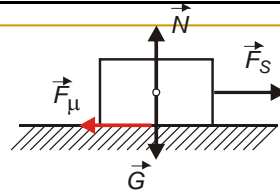
$$\mu_0 G \cos \alpha = G \sin \alpha$$

$$\text{odnosno } \mu_0 = \tan \alpha$$

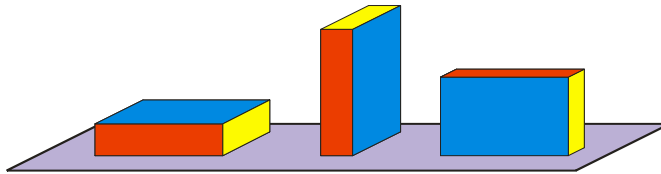
Moguća ravnoteža na strmoj ravni je dok je ugao  $\alpha$  strme ravni manji od granične vrednosti  $\varphi_0$

$$\tan \alpha \leq \tan \varphi_0$$

## Sila trenja klizanja



- U dovoljno širokoj oblasti intenzitet sile trenja klizanja ne zavisi od veličine dodirnih površi



$$F_{\mu \max} = F_{gr} = \mu_0 \cdot N$$

$\mu_0$  – statički koeficijent trenja klizanja

Statički koeficijent trenja klizanja zavisi od materijala tela koja se dodiruju kao i stanja dodirnih površina

Vrednosti statičkog koeficijenta trenja klizanja za neke materijale

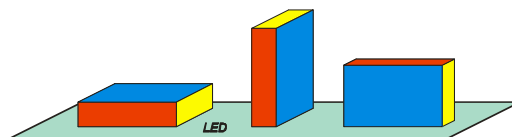
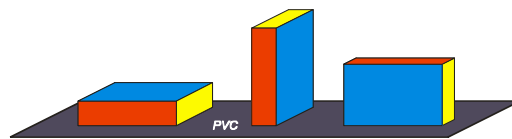
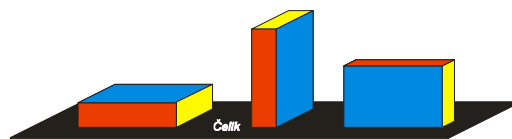
Čelik po Ledu  $\mu=0,027$

Čelik po čeliku  $\mu=0,15$

Bronza po LG  $\mu=0,19$

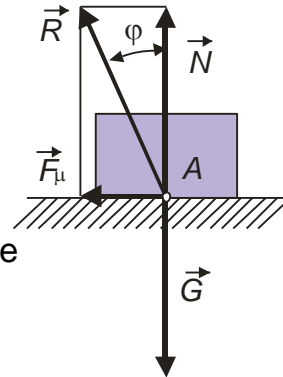
Drvo po drvetu  $\mu=0,5-0,6$

Metal po drvetu  $\mu=0,02$



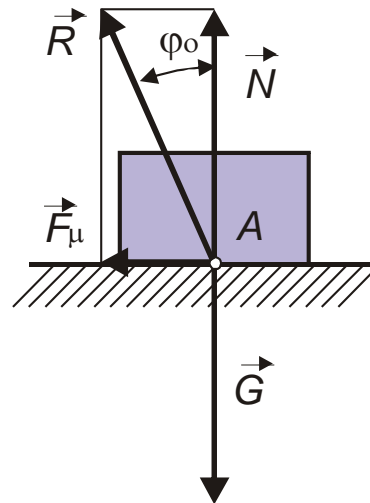
## Reakcije hrapave veze

- Reakcija glatke veze ravne površi je normalna sila  $N$
- Reakcija hrapave veze se sastoji iz dve komponente:
  - Normalne reakcije  $\vec{N}$
  - Tangentne reakcije u ravni dodira dva tela, sile trenja klizanja  $\vec{F}_\mu$
- Ukupna reakcija  $\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_\mu$  sa normalom na površ gradi ugao  $\varphi$



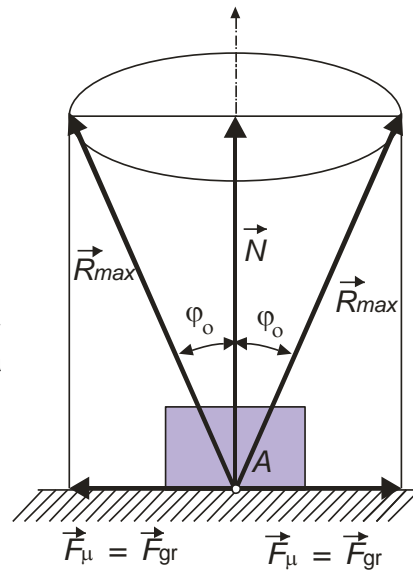
## Ugao trenja

- Najveći ugao  $\varphi_0$  za koji se usled trenja otkloni ukupna reakcija veze  $R$  hrapave površi, naziva se ugao trenja



## Konus trenja

- Ako je koeficijent trenja klizanja za dati materijal jednak u svim pravcima
- I ako se ugao trenja  $\varphi_0$  prenese u svim pravcima
- Dobijeni kružni konus, sa uglom pri vrhu  $2\varphi_0$  zove se **konus trenja**



## Konus trenja

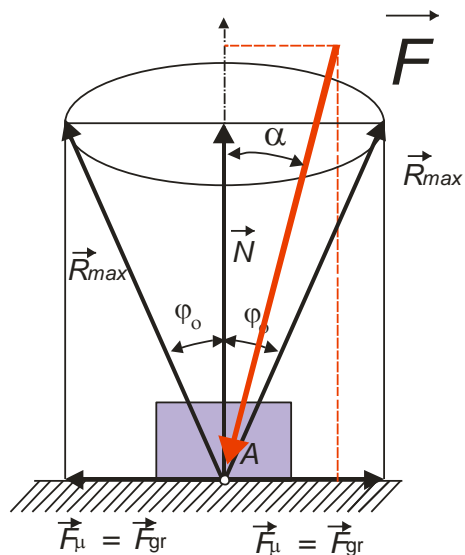
- Ako na neko telo A zanemarljive težine na hrapavoj površi deluje sila  $F$ , napadne linije pod uglom  $\alpha$  prema normalni na površ
- Da bi se telo pokrenulo mora biti ispunjen uslov:

$$F \sin \alpha > F_{\mu} \text{ odnosno}$$

$$F \sin \alpha > \mu_0 N = \mu_0 F \cos \alpha$$

$$\operatorname{tg} \alpha > \mu_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$$

$$\alpha > \varphi_0$$

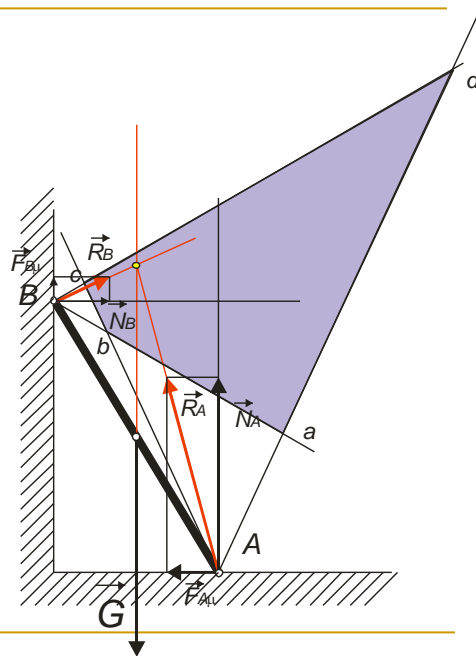


*Ako je aktivna sila unutar konusa trenja telo će mirovati*



## Trougao trenja

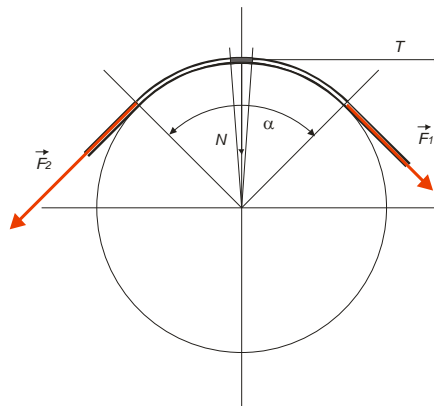
- Ako se ugao  $\varphi_0$  prenese na dve ravni na koje se oslanja homogena greda težine  $G$  simetrično na normalu na ravan
- U preseku graničnih linija dobija se trougao trenja
- Ako je presek napadnih linija reakcija  $R_A$ ,  $R_B$  i  $G$  u trouglu trenja, postoji ravnoteža



## Trenje užeta o hrapavu cilindričnu površ

- Pri klizanju užeta po hrapavoj površi nepokretnog cilindra nastaje sila trenja klizanja
- Ojlerova formula

$$F_1 = F_2 e^{\mu \alpha}$$

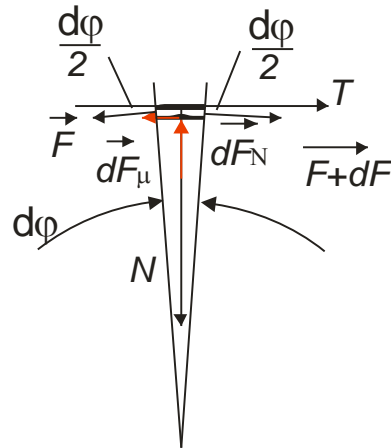


## Trenje užeta o hrapavu cilindričnu površ

Analizom elementa užeta zapažamo postojanje:

- Elementarne sile trenja  $dF_\mu$
- Elementarne normalne sile  $dF_N$
- Sile u užetu  $F_1$  i  $F_2$

Izabrati koordinatni sistem u pravcu tangente i pravcu normale



## Trenje užeta o hrapavu cilindričnu površ

Uslovi ravnoteže za koordinatni sistem OTN:

$$\sum T_i = (F + dF) \cos \frac{d\varphi}{2} - F \cos \frac{d\varphi}{2} - dF_\mu = 0$$

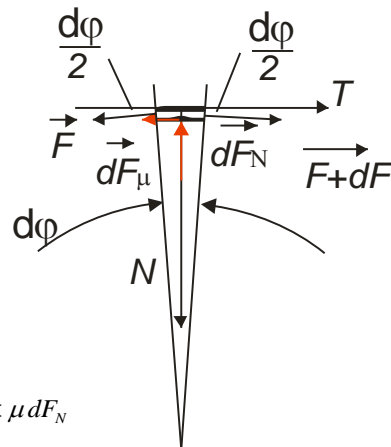
$$\sum N_i = (F + dF) \sin \frac{d\varphi}{2} - F \sin \frac{d\varphi}{2} - dF_N = 0$$

Kako je elementarna veličina  $d\varphi$  veoma mala može se smatrati:

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}; \quad \cos \frac{d\varphi}{2} = 1; \quad dF \frac{d\varphi}{2} \approx 0$$

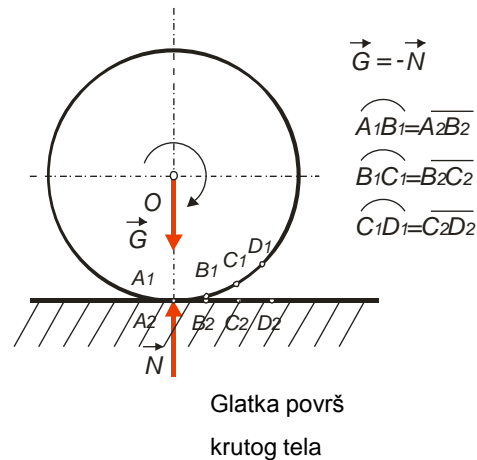
Ranije definisano trenje klizanja  $0 < dF_\mu < \mu dF_N$

$$\frac{dF}{F} = \mu d\varphi \rightarrow \int_{F_1}^{F_2} \frac{dF}{F} = \int_0^\alpha \mu d\varphi \rightarrow F_1 = F_2 e^{\mu\alpha}$$



## Kotrljanje točka po horizontalnom putu

- Ako se za vreme kretanja točka po horizontalnom putu dužina kružnih lukova nastalih rotacijom točka poklapa sa dužinom duži prenetih po tangenti **točak vrši čisto kotrljanje**
- Otpor idealne ravne glatke površi je normalan na površ i brojno jednak težini točka



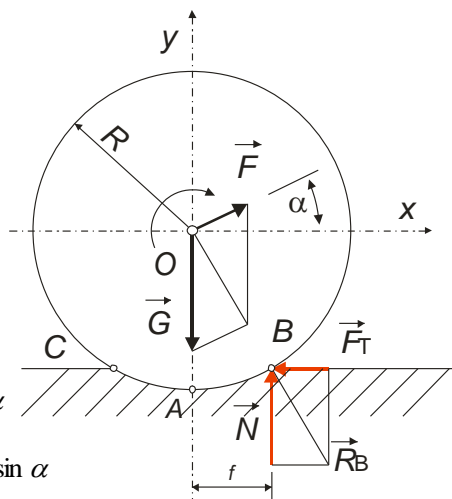
## Trenje kotrljanja

- Otpor koji nastaje pri kotrljanju jednog tela po površini drugog tela naziva se **trenje kotrljanja**

$$\sum X_i = F \cos \alpha - F_T = 0 \Rightarrow F_T = F \cos \alpha$$

$$\sum Y_i = N + F \sin \alpha - G = 0 \Rightarrow N = G - F \sin \alpha$$

$$\sum M_A^{\vec{F}} = N \cdot f - R \cdot F \cos \alpha = 0 \Rightarrow N \cdot f = R \cdot F \cos \alpha$$



$f$  – rastojanje napadne linije normalne reakcije  $N$  od centra

## Trenje kotrljanja

- Tangentna komponenta  $F_T$  uvek je manja reakcija veze  $F_T \leq \mu \cdot N$

- $R_B$  – sila trenja pri kotrljanju

- $M_{TR}$  – moment sprega trenja kotrljanja

$$M_{TR} = N f = F R \cos \alpha \leq M_{TRmax} = N f_{GR}$$

- $f$  – koeficijent trenja kotrljanja ili krak otpora protiv kotrljanja

Vrednosti koeficijenta kotrljanja

Meki čelik po mekom čeliku  $f=0,05$  mm

Kalj. čelik po kalj. čeliku  $f=0,01$  mm

Drvo po čeliku  $f=0,3-0,4$  mmm

## Rezime

Reakcija realne veze uvek ima dve komponente:

- normalnu i
- silu trenja

Sila trenja je u ravni dodira dva tela:

- ima pravac kojim bi se telo pomeralo
- smer sile trenja je suprotan od smera pomeranja tela

Zavisno od karaktera pomeranja jednog tela po površini drugog razlikuju se dve vrste trenja:

- Trenje klizanja
- Trenje kotrljanja

## Rezime

Sila trenja klizanja je proporcionalna intenzitetu normalne reakcije veze i u uslovima ravnoteže zadovoljava nejednačinu (Kulonov zakon)

$$0 < F_{\mu} \leq \mu \cdot F_N$$

Ukupna reakcija veze sa normalom te veze zaklapa neki ugao koji zadovoljava uslov:

$$\varphi < \alpha \text{ gde je } \operatorname{tg} \alpha = \mu$$

Geometrijsko mesto ukupne reakcije veze za sve moguće pravce sila trenja u jednoj ravni dodira, a za najveću silu trenja, zove se konus trenja.

## Rezime

Kad uže, ili neko drugo savitljivo telo, klizi po površi nepomičnog hrapavog cilindra, nastaje trenje užeta pri čemu je:

$$0 < F_1 \leq F_2 \cdot e^{\mu \alpha}$$

Pri kotrljanju jednog tela po drugom nastaje otpor koji se naziva trenje pri kotrljanju

Uslov da ne dođe do kotrljanja:

$$0 \leq f \leq f_{\max}$$

$$0 < F_{\mu} \leq \mu \cdot N$$