

Opšti sistem sila i spregova

- Moment sile za tačku i osu
- Spreg sila
- Paralelno pomeranje sistema sila u jednu tačku
- Uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema sila i spregova



1

Mehaničke veličine kojima se definiše obrtno dejstvo sile su:

- Moment sile za tačku
- Moment sile za osu
- Spreg sila



2

Opšti sistem sila i spregova

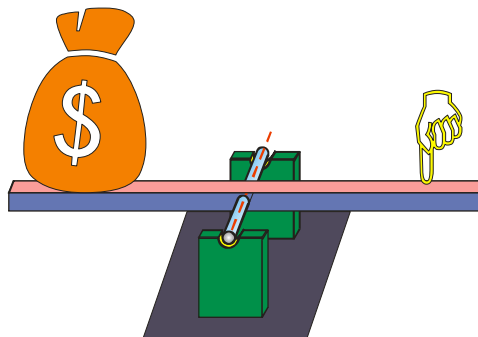
Moment sile za osu



3

Moment sile za osu

- Moment sile za osu izaziva obrtanje oko te ose
- Ravan delovanja momenta je upravna na osu obrtanja
- Moment sile za osu je mera težnje sile da okrene telo oko te ose



4

Moment sile za osu



- Moment sile za osu je mehanička veličina koja definiše obrtanje oko ose
- Intenzitet momenta za osu je proizvod intenziteta projekcije sile na ravan upravnu na osu i kraka te sile
- Moment sile za osu je skalar

5

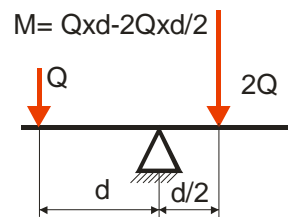
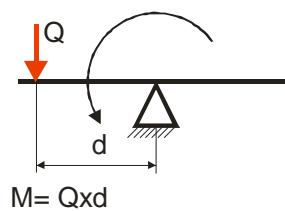
Moment sile za osu



- Posmatrajmo vertikalnu silu u vertikalnoj ravni koja deluje na polugu čija je osa rotacije horizontalna

Intenzitet momenta sile za osu zavisi od

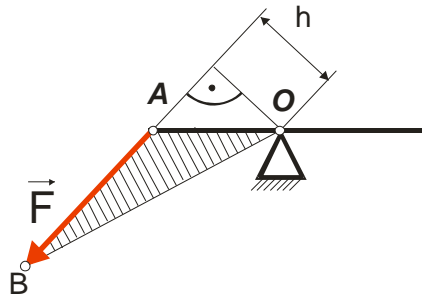
- veličine sile
- normalnog rastojanja sile od ose



6

Intenzitet momenta sile za osu

- Geometrijski, interpretacija intenziteta momenta sile za osu je jednaka dvostrukoj površini trougla koji obrazuje projekcija sile na ravan normalnu na osu obrtanja kao strana trugla i prodor ose kao treće teme trougla

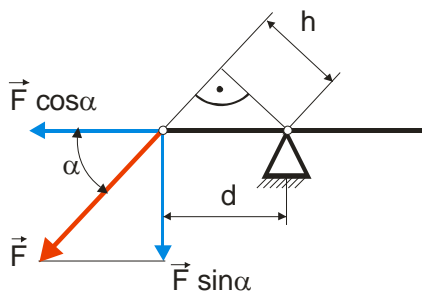


$$M = F \times h = 2 \frac{1}{2} A_{\Delta OAB}$$

7

Moment sile za osu

- Posmatrajmo kosu silu pod uglom α u vertikalnoj ravni koja deluje na polugu
- Intenzitet momenta zavisi od veličine sile i normalnog rastojanja sile od ose
- Intenzitet momenta je veličina vertikalne projekcije i rastojanja od ose do napadne tačke
- Horizontalna komponenta se preseca sa osom pa je njen moment nula

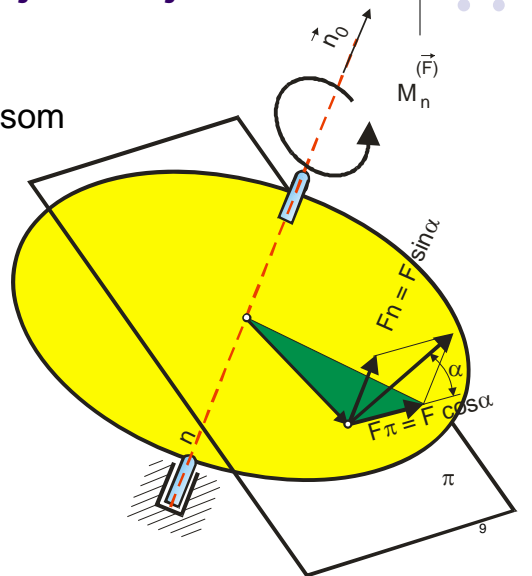


$$M = F \times h = F \sin \alpha \times d$$

8

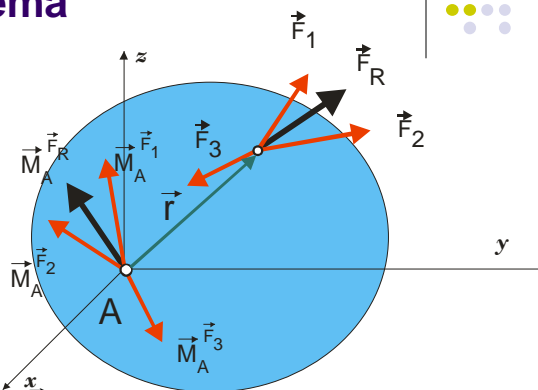
Moment sile za osu jednak je nuli kada:

- Sila seče osu
- Sila je paralelna sa osom
- Sila je jednaka nuli



Varinjonova teorema

Moment rezultante prostornog sistema sučeljnih sila za tačku jednak je vektorskom zbiru momenata komponenta za istu tačku



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n)$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

Varinjonova teorema za prostorni sistem sila



- Moment rezultante FR prostornog sistema sila u odnosu na bilo koju tačku O_1 jednak je vektorskom zbiru momenata svih sila koje deluju na telo u odnosu na istu tačku O_1 .
- Moment rezultante u odnosu na bilo koju osu jednak je algebarskom zbiru momenata svih sila koje deluju na telo u odnosu na istu osu.

11

Varinjonova teorema momenta rezultante za osu



- Moment rezultante za jednu osu jednak je zbiru momenata komponenta za tu istu osu

12

Rezime



- Moment sile za osu
- Mera težnje sile da okrene telo oko ose
- Skalar
- Proizvod sile i normalnog rastojanja do ose (kraka sile)
- Jednak nuli kada je sila paralelna sa osom i kada preseca osu
- Za istu osu momenti se algebarski sabiraju
- Moment rezultante za osu jednak je zbiru momenata komponentata za istu osu

13

Paralelne sile u ravni

Slaganje paralelnih sila u ravni

- istih smerova
- suprotnih smerova

Određivanje rezultante primenom Varinjonove teoreme

- Spreg sila



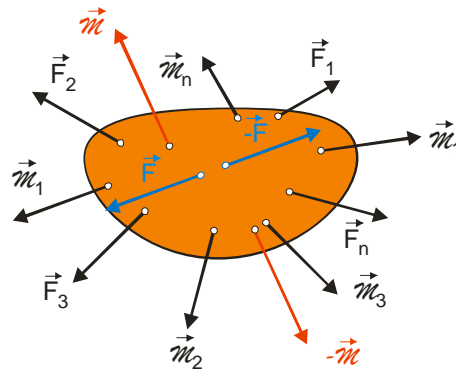
14

Aksioma 2 – aksioma o mehaničkom dejstvu



Mehaničko dejstvo datog sistema sila i spregova koji deluju na kruto telo se ne menja, ako se tom sistemu dodaju ili oduzmu

- dve uravnotežene sile ili
- dva uravnotežena sprega.



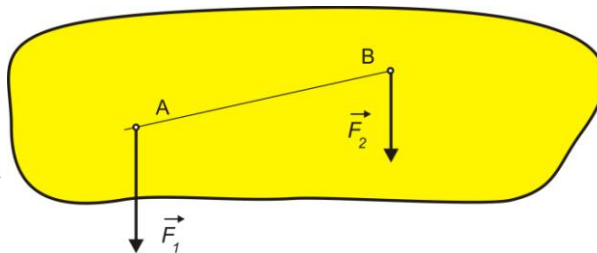
$$(\vec{M}, -\vec{M}) \quad (\vec{F}, -\vec{F})$$

15

Paralelne sile u ravni slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova



- Na telo deluju dve paralelne sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 istog smera u tačkama A i B
- Koristi se druga aksioma statike i dodaje par uravnoteženih sila \vec{F}_1' i \vec{F}_2'



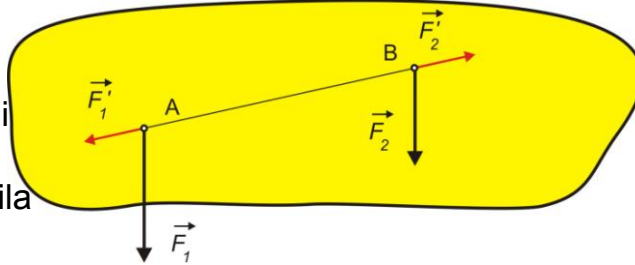
16

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova



- Na telo deluju dve paralelne sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 istog smera u tačkama A i B
- Koristi se druga aksioma statike i dodaje par uravnoteženih sila \vec{F}_1' i \vec{F}_2'



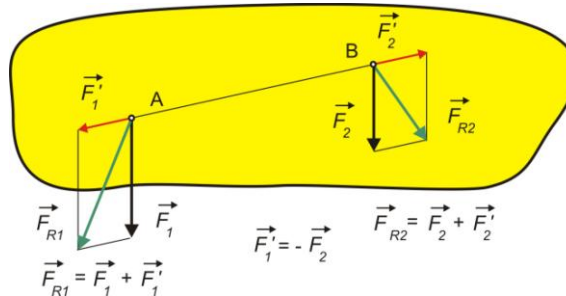
17

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova



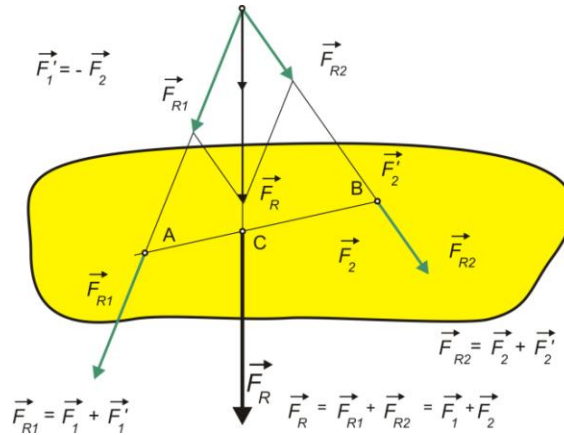
- Metodom paralelograma sile određuju se rezultante paralelnih u tačkama A i B



18

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova

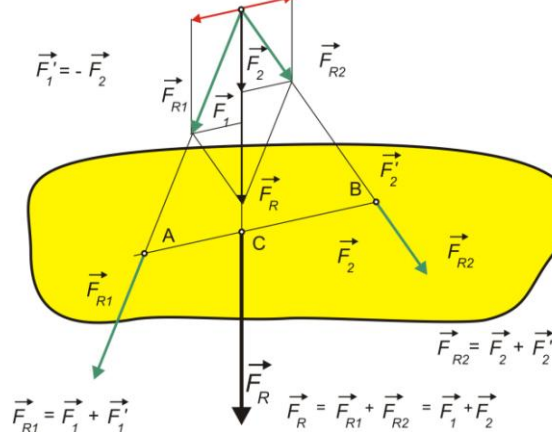


Dobijene rezultante su sučeljne sile pa se određuje njihova rezultanta

19

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova

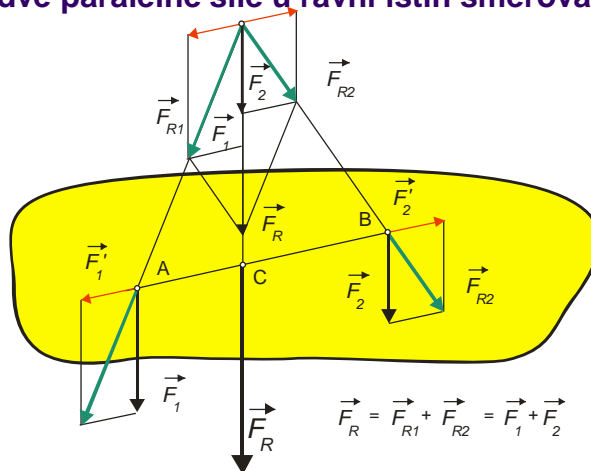


Pošto su sile bile paralelne a dodate su im dve uravnotežene sile primenom paralelograma sila razlaganjem rezultanti pokazuje se da je zajednička rezultanta jednaka zbiru paralelnih sila

20

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova



$$\vec{F}_R = \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

- Rezultanta je jednaka zbiru dve paralelne sile istog smerova a tačka dejstva je na pravoj koja prolazi kroz napadne tačke paralelnih sila

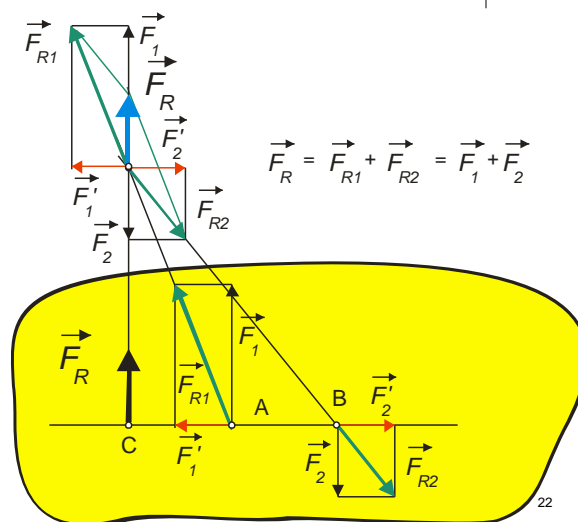
21

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni suprotnih smerova



- Na telo deluju dve paralelne sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 suprotnog smerova u tačkama A i B
- Koristi se druga aksioma statike i dodaje par uravnoteženih sila \vec{F}'_1 i \vec{F}'_2

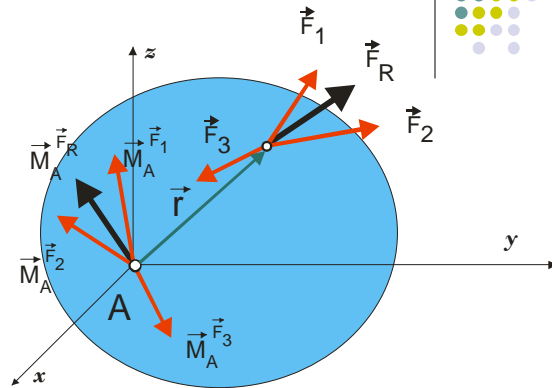


$$\vec{F}_R = \vec{F}_{R1} + \vec{F}_{R2} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

22

Varinjonova teorema

Moment rezultante za tačku jednak je zbiru momenata komponenata za istu tačku



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n)$$

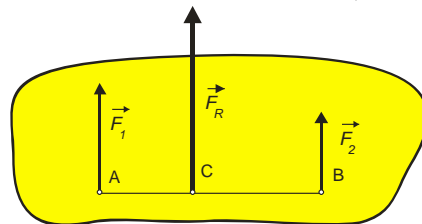
$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

23

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova

- Na telo deluju dve paralelne sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 istog smera u tačkama A i B
- Primenom Varinjonove teoreme određuje se napadna tačka rezultante



$$\text{zatačku } C \quad M_c^{\vec{F}_R} = M_c^{\vec{F}_1} + M_c^{\vec{F}_2}$$

$$F_R \cdot 0 = F_2 \cdot \overline{BC} - F_1 \cdot \overline{AC}$$

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{F_1}{F_2} \quad ; \quad F_R = F_1 + F_2$$

$$\text{zatačku } A \quad F_R \cdot \overline{AC} = F_1 \cdot 0 + F_2 \cdot \overline{AB}$$

$$F_R = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot F_2 = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot F_1 \quad \frac{\overline{AB}}{F_R} = \frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2}$$

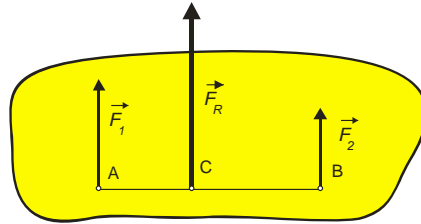
24

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile u ravni istih smerova



Na telo deluju dve paralelne sile $F_1 = 4 \text{ kN}$ i $F_2 = 2 \text{ kN}$ istog smera u tačkama A i B čije rastojanje je 9 m



Rešenje:

Intenzitet rezultante $F_R = F_1 + F_2 = 4 + 2 = 6 \text{ kN}$

Položaj tačke C

$$\overline{AC} = \overline{AB} \frac{F_2}{F_R} = 9 \frac{2}{6} = 3 \text{ m}$$

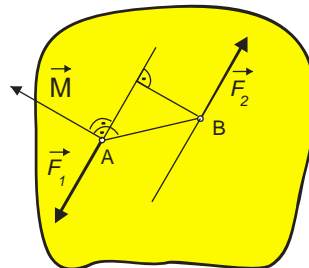
25

Paralelne sile u ravni

slaganje dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova, koje ne leže na istoj napadnoj liniji



Kada na telo deluju dve paralelne sile istih intenziteta, suprotnih smerova, a da nisu na istoj napadnoj liniji, rezultanta je jednaka nuli, ali telo nije u ravnoteži zbog postojanja rezultujućeg momenta



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

Vektor sprega sila \vec{M}

26

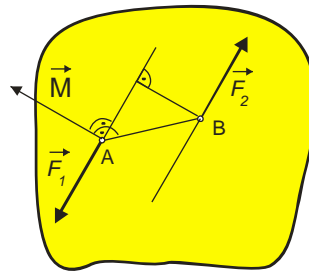
Spreg sila

slaganje dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova, koje ne leže na istoj napadnoj liniji



- Moment sprega sila u odnosu na proizvoljnu tačku jednak je momentu jedne sile sprega u odnosu na napadnu tačku druge sile sprega.
- Moment sprega sila zavisi od intenziteta sila koje obrazuju spreg, najkraćeg rastojanja između njih i ravni u kojoj deluju.

\vec{M}



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

27

Spreg sila definišu



1. Intenziteti sila \vec{F} i normalnog rastojanja između sila
2. Položaj ravni određene silama \vec{F} , time je definisan pravac dejstva
3. Smer obrtanja u ravni

Obrtni efekat sile oko tačke karakterišu tri veličine, pa pripada klasi **VEKTORA**

28

Vektor sprega sila



- Vektor sprega sila je vektorska veličina
- Pravac vektora je normala na ravan dejstva sprega – ravan koju obrazuju paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova
- Smer je takav da se iz vrha vektora posmatrana rotacija vidi u matematički pozitivnom smeru
- Intenzitet vektora je proizvod jedne sile i normalnog rastojanja između sila

29

Vektor sprega sila



- Kao što se primećuje, vektor sprega sila se ne vezuje za napadnu tačku već za ravan, pa se spreg sila naziva i

PLIVAJUĆI VEKTOR

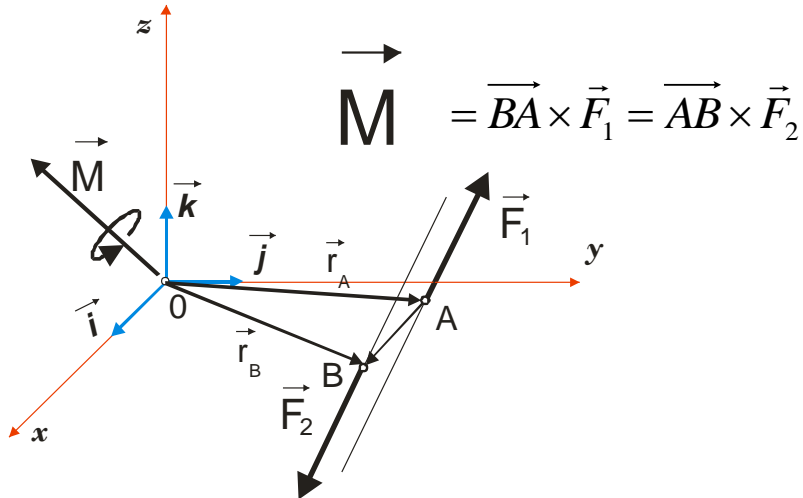


U označavanju sprega se ne naglašava tačka delovanja

Jedinica je Nm

30

Vektor sprega sila



Ovo se dokazuje, zbog obima kursa dokaz neće biti pokazan, a ima ga u preporučenoj literaturi

31

Slaganje spregova

- Spregovi sila su vektori, pa za operacije sa njima važe pravila kao i za sve vektore

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

32

Slaganje spregova



- Spreg sila koji zamenjuje dejstvo datog sistema spregova naziva se **rezultujući spreg sila**
- Spregovi čije dejstvo na kruto telo zamenjuje rezultujući spreg, nazivaju se **komponentni spregovi sila**

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

33

Slaganje spregova



- Rezultujući spreg u koordinatnom sistemu Oxyz definiše se

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$$

$$M_{xR} = M_{x1} + M_{x2} + \dots + M_{xn} = \sum_{i=1}^n M_{xi}$$

$$M_{yR} = M_{y1} + M_{y2} + \dots + M_{yn} = \sum_{i=1}^n M_{yi}$$

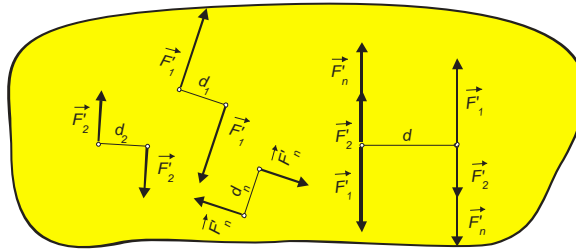
$$M_{zR} = M_{z1} + M_{z2} + \dots + M_{zn} = \sum_{i=1}^n M_{zi}$$

34

Sabiranje spregova sila koji deluju u istoj ravni



Dati sistem spregova sila koji deluju u jednoj ravni moguće je zameniti jednim spregom koji deluje u istoj ravni i čiji je moment jednak algebarskom zbiru momenata komponentnih spregova sila



$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n$$

$$M = F_R d = F_1 d_1 + F_2 d_2 + \dots + F_n d_n$$

35

Uslovi ravnoteže spregova



- Da bi telo bilo u ravnoteži pod dejstvom spregova, rezultujući spreg sistema spregova sila, mora biti jednak nuli.

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

36

Uslovi ravnoteže spregova



Ako sistem spregova analiziramo u koordinatnom sistemu Oxyz uslovi ravnoteže se mogu napisati

$$\vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

$$M_{xR} = M_{x1} + M_{x2} + \dots + M_{xn} = \sum_{i=1}^n M_{xi} = 0$$

$$M_{yR} = M_{y1} + M_{y2} + \dots + M_{yn} = \sum_{i=1}^n M_{yi} = 0$$

$$M_{zR} = M_{z1} + M_{z2} + \dots + M_{zn} = \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0$$

37

Osnovni statički elementi



- **Sila** - klizeći vektor čije je dejstvo translatorno
- **Moment sile za tačku** - vezan vektor i njegovo dejstvo je obrtno
- **Spreg sila** - slobodan vektor i njegovo dejstvo je čisto obrtanje

Iako su sva tri elementa vektori

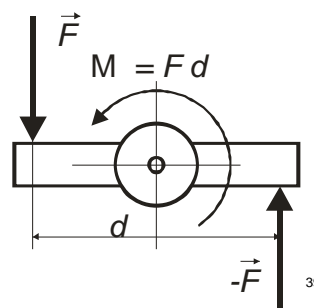
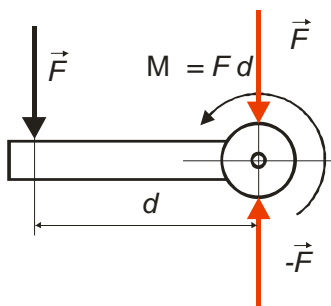
ne mogu se međusobno sabirati

38

Razlika između momenta sile i sprega sile

Sila stvara moment za datu tačku, ali i silu pritiska na osu okretanja

Spreg stvara moment za datu tačku, ali bez pritiska na osu okretanja



39

Uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema sile i spregova

Potrebni i dovoljni uslovi ravnoteže slobodnog krutog tela na koji deluje proizvoljni sistem sile i spregova su:

1. Da je glavni vektor - rezultanta sistema sile jednak nuli
2. Da je glavni moment - rezultujući moment sistema jednak nuli

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{M}_R = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

40

Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova



Ako sistem sila i spregova analiziramo u koordinatnom sistemu Oxyz uslovi ravnoteže se mogu napisati

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \quad \vec{M}_R = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0$$

$$F_{xR} = F_{x1} + F_{x2} + \dots + F_{xn} = \sum_{i=1}^n F_{xi} = 0 \quad M_{xR} = M_{x1} + M_{x2} + \dots + M_{xn} = \sum_{i=1}^n M_{xi} = 0$$

$$F_{yR} = F_{y1} + F_{y2} + \dots + F_{yn} = \sum_{i=1}^n F_{yi} = 0 \quad M_{yR} = M_{y1} + M_{y2} + \dots + M_{yn} = \sum_{i=1}^n M_{yi} = 0$$

$$F_{zR} = F_{z1} + F_{z2} + \dots + F_{zn} = \sum_{i=1}^n F_{zi} = 0 \quad M_{zR} = M_{z1} + M_{z2} + \dots + M_{zn} = \sum_{i=1}^n M_{zi} = 0$$

41

Rezime:



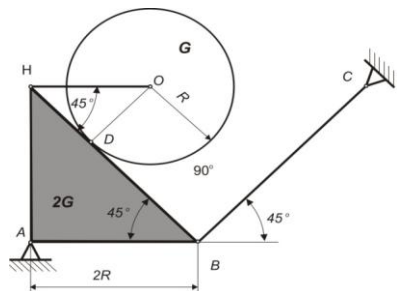
- Zbir paralelnih sila istog smera, a različitog intenziteta je sila paralelna datim silama čiji je intenzitet jednak algebarskom zbiru datih sila, a smer u smeru datih sila
- Zbir paralelnih sila suprotnih smerova, a različitog intenziteta je sila paralelna datim silama, intenziteta jednakog njihovoj razlici i u smeru delovanja veće sile
- Zbir paralelnih sila istog intenziteta, a suprotnih smerova je spreg sila

42

Rezime:

- Varinjonova teorema – pravac delovanja rezultante
- Spreg sila je vektor vezan za ravan
- Iako su vektori, sila i spreg se ne mogu sabirati
- Vektorski zbir spregova i momenata sila je glavni moment
- Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila su da vektorski zbir svih sila i momenata sila i spregova budu jednaki nuli

43

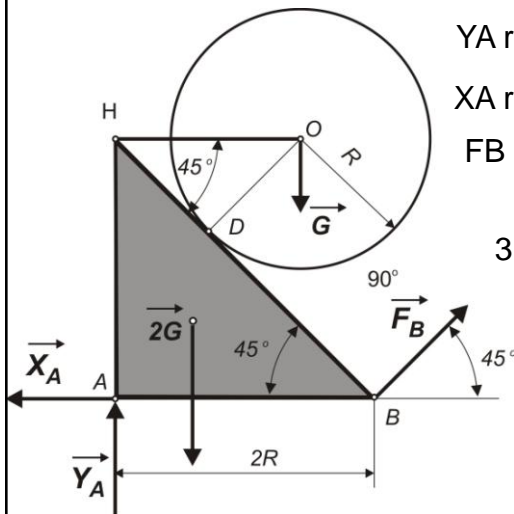


primer:

- Sistem krutih tela sastoji se od homogene ploče oblika jednakokrakog pravouglog trougla ABH, težine $2G$ i dužine kateta $2R$, cilindra poluprečnika R i težine G . U temenu A ploča je zglobno vezana, a u tački B vezano je uže BC koje sa horizontalom zaklapa ugao od 45° .
- Cilindar je vezan horizontalnim nerastegljivim lakim užetom za tačku H ploče i oslonjen na hipotenuzu BH. Težinu užadi zanemariti, a sve potrebne podatke uzeti sa slike.

44

telo oslobođeno veza



YA reakcija nepokretnog oslonca (1)

XA reakcija nepokretnog oslonca (1)

FB kosa sila poznat pravac (1)

3 nepoznate - 3 uslova

$$\sum X_i = 0$$

$$\sum Y_i = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

45

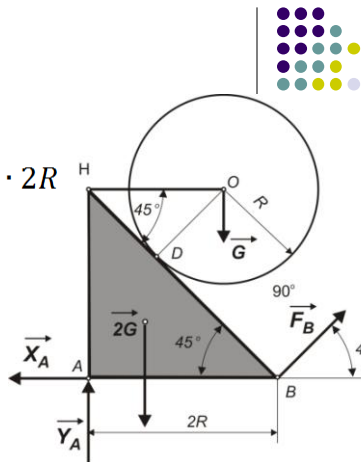
$\overline{OH} = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$

$$\sum X_i = -X_A + F_B \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + F_B \sin 45^\circ - G - 2G = 0$$

$$\sum M_A = G \cdot R\sqrt{2} + 2G \frac{1}{3} \cdot 2R - F_B \sin 45^\circ \cdot 2R = 0$$

46



$$\sum M_A = G \cdot R\sqrt{2} + 2G \frac{1}{3} \cdot 2R - F_B \sin 45^\circ \cdot 2R$$

$$F_B 2R \frac{\sqrt{2}}{2} = G \cdot R\sqrt{2} + 2G \frac{1}{3} \cdot 2R$$

$$F_B = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(G\sqrt{2} + G \frac{4}{3} \right)$$

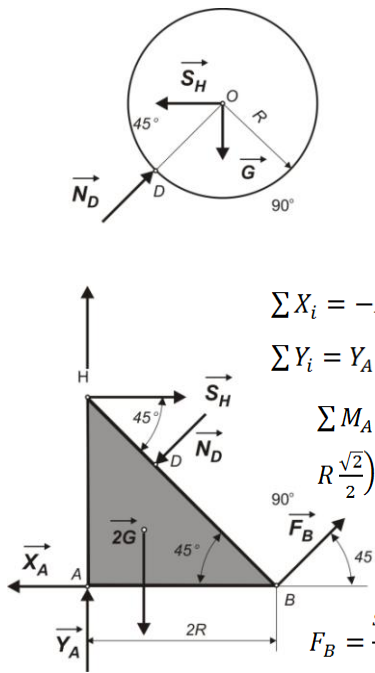
$$\sum X_i = -X_A + F_B \cos 45^\circ = 0$$

$$X_A = F_B \cos 45^\circ = \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) G \frac{\sqrt{2}}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2}{3} \right) G$$

$$\sum Y_i = Y_A + F_B \sin 45^\circ - G - 2G = 0$$

$$Y_A = 3G - F_B \sin 45^\circ = 3G - \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) G = \left(\frac{7}{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) G$$

47



$$\sum X_i = -S_H + N_D \cos 45^\circ = 0$$

$$\sum Y_i = N_D \sin 45^\circ - G = 0$$

$$N_D = \frac{G}{\sin 45^\circ} = \frac{G}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = G\sqrt{2}$$

$$S_H = N_D \cos 45^\circ = G\sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = G$$

$$\sum X_i = -X_A + F_B \cos 45^\circ - N_D \cos 45^\circ + S_H = 0$$

$$\sum Y_i = Y_A + F_B \sin 45^\circ - N_D \sin 45^\circ - 2G = 0$$

$$\sum M_A = S_H 2R + N_D \sin 45^\circ R\sqrt{2} - N_D \cos 45^\circ \left(2R - R \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + 2G \frac{1}{3} \cdot 2R - F_B \sin 45^\circ \cdot 2R = 0$$

$$F_B = \frac{S_H 2R + N_D \frac{\sqrt{2}}{2} R\sqrt{2} - N_D \frac{\sqrt{2}}{2} (2R - R \frac{\sqrt{2}}{2}) + 2G \frac{1}{3} \cdot 2R}{R\sqrt{2}} = \left(1 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \right) G$$