

Paralelne sile u ravni MOMENT SILE ZA TAČKU

- Pojam momenta sile za tačku
- Predstavljanje momenta sile za tačku kao vektora
- Moment sile za tačku kao vektorski proizvod vektora položaja i vektora sile



1

Osnovni statički elementi

- **Sila** - klizeći vektor čije je dejstvo translatorno
- **Moment sile za tačku** - vezan vektor i njegovo dejstvo je obrtno
- **Spreg sile** - slobodan vektor i njegovo dejstvo je čisto obrtanje

Iako su sva tri elementa vektori

ne mogu se međusobno sabirati



2

Moment sile za tačku



- Kretanje tela izazivaju sile.
U opštem slučaju kretanja se dele na:
 - Pravolinijsko kretanje ili translaciju
Uslovljava ga rezultatna sila i ostvaruje se u pravcu napadne linije sile i u smeru dejstva sile
 - Obrtno kretanje ili rotacija
Uslovljava ga novi statički element, moment sile

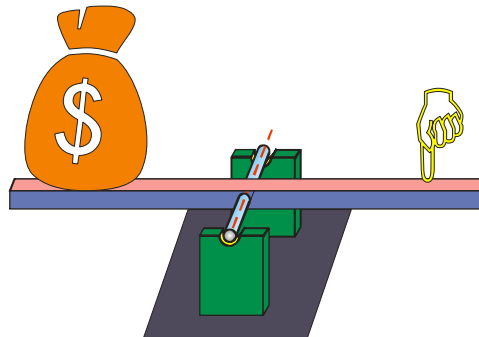
3

PODSEĆANJE

Moment sile za osu



- Moment sile za osu izaziva obrtanje oko te ose
- Ravan delovanja momenta je upravna na osu obrtanja
- Moment sile za osu je mera težnje sile da okrene telo oko te ose



4

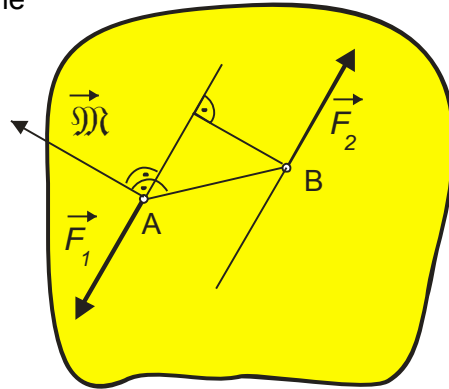
Paralelne sile u ravni **PODSEĆANJE**

slaganje dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova, koje ne leže na istoj napadnoj liniji



Kada na telo deluju dve paralelne sile istih intenziteta, suprotnih smerova, a da nisu na istoj napadnoj liniji, rezultanta je jednaka nuli, ali telo nije u ravnoteži zbog postojanja rezultujućeg momenta

Vektor sprega sile $\vec{\mathcal{M}}$



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

5

Spreg sile

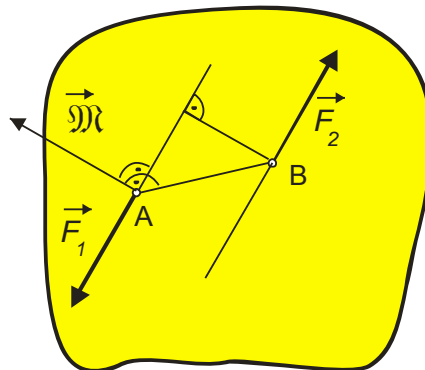
PODSEĆANJE

slaganje dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova, koje ne leže na istoj napadnoj liniji



- Moment sprega sile u odnosu na proizvoljnu tačku jednak je momentu jedne sile sprega u odnosu na napadnu tačku druge sile sprega.
- Moment sprega sile zavisi od intenziteta sile koje obrazuju spreg, najkraćeg rastojanja između njih i ravni u kojoj deluju.

$\vec{\mathcal{M}}$



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

6

PODSEĆANJE



Spreg sila definišu

1. Intenziteti sila \vec{F} i normalnog rastojanja između sila
2. Položaj ravni određene silama \vec{F} , time je definisan pravac dejstva
3. Smer obrtanja u ravni

Obrtni efekat sile oko tačke karakterišu tri veličine, pa pripada klasi **VEKTORA**

7

PODSEĆANJE



Vektor sprega sila

- Vektor sprega sila je vektorska veličina
- Pravac vektora je normala na ravan dejstva sprega – ravan koju obrazuju paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova
- Smer je takav da se iz vrha vektora posmatrana rotacija vidi u matematički pozitivnom smeru
- Intenzitet vektora je proizvod jedne sile i normalnog rastojanja između sila

8

PODSEĆANJE



Vektor sprega sila

- Kao što se primećuje, vektor sprega sila se ne vezuje za napadnu tačku već za ravan, pa se spreg sila naziva i

PLIVAJUĆI VEKTOR



U označavanju sprega se ne naglašava tačka delovanja

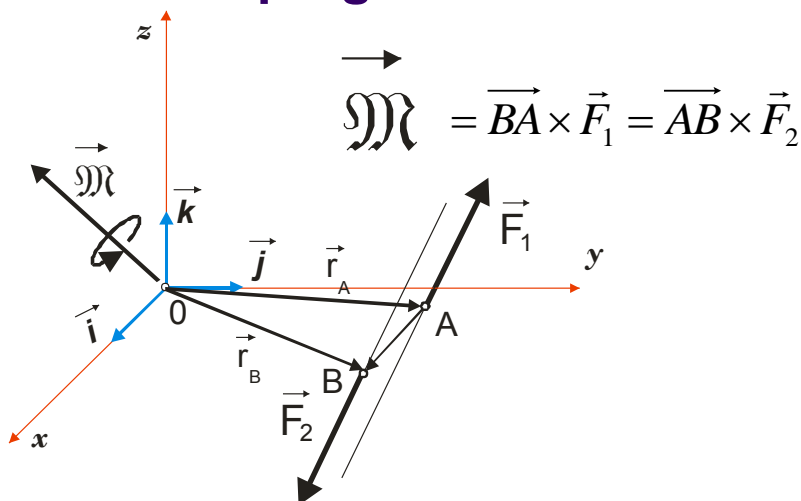
Jedinica je Nm

9

PODSEĆANJE



Vektor sprega sila

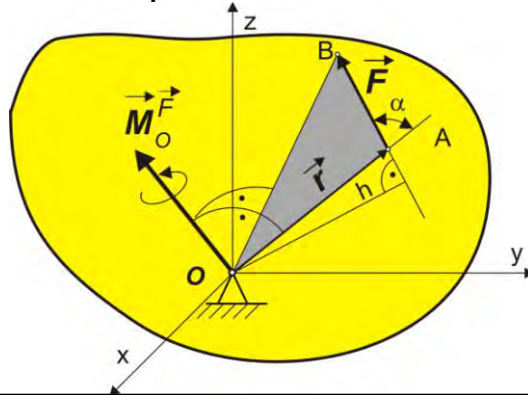


Ovo se dokazuje, zbog obima kursa dokaz neće biti pokazan, a ima ga u preporučenoj literaturi

10

Moment sile za tačku

Pojam momenta sile za tačku nastao je kao rezultat određivanja obrtnog efekta sile koja deluje na kruto telo koje se može obrtiti oko jedne tačke.



11

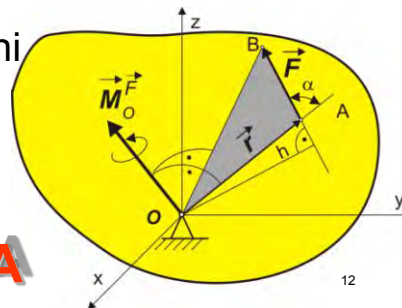
Moment sile za tačku

• Obrtni efekat sile oko tačke O zavisi od:

1. Intenziteta sile \vec{F} i kraka h – normalnog rastojanja od obrtne tačke do napadne linije sile
2. Položaja obrtanja ravni OAB određene obrtnom tačkom O i silom \vec{F}
3. Smera obrtanja u toj ravni

Obrtni efekat sile oko tačke karakterišu tri veličine, pa pripada klasi

VEKTORA



12

Moment sile za tačku karakterišu



- Intenzitet $M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$
- Pravac – upravan na ravan dejstva
- Smer – u stranu odakle se iz vrha vektora okretanje silom vidi u smeru suprotnom od smeru kazaljke na časovniku

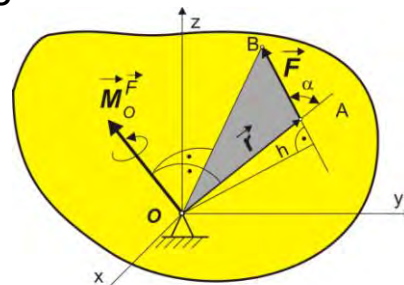
13

Intenzitet momenta sile za tačku



- Intenzitet momenta sile \vec{F} za tačku O naziva se veličina koja je jednaka proizvodu iz inteziteta sile i kraka sile

$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$



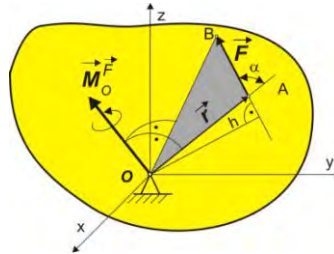
Jedinica mere je Njutr-metar Nm

14

Pravac momenta sile za tačku

- Pravac momenta sile za tačku je upravan na ravan dejstva momenta. Ravan dejstva momenta sile za tačku definišu sila i tačka obrtanja.

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

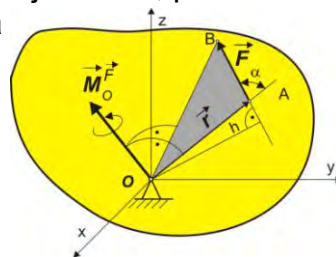


15

Smer momenta sile za tačku

- Pozitivan **smer obrtanja** je takav da posmatran iz vrha vektora na ravan obrtanja vidi okretanje u matematički pozitivnom smeru, to jest u smeru suprotnom od smera okretanja satnih kazaljki
- Može se primeniti i pravilo desne ruke: ako se prsti desne ruke poklope sa smerom dejstva sile, palac pokazuje smer dejstva momenta

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

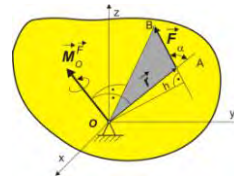


16

Intenzitet momenta sile za tačku

$$|\vec{M}_O^{\vec{F}}| = F \cdot h$$

- Intenzitet momenta sile F za tačku se ne menja ako se sila pomera duž napadne linije
- Intenzitet momenta sile za tačku se ne menja i ako se tačka pomera po pravoj paralelnoj napadnoj liniji sile

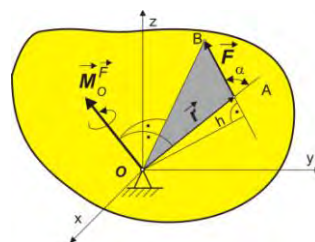
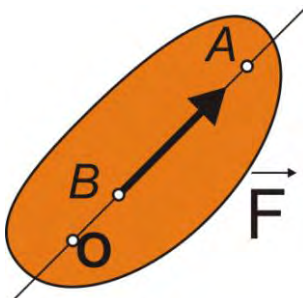


17

Intenzitet momenta sile za tačku

$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$

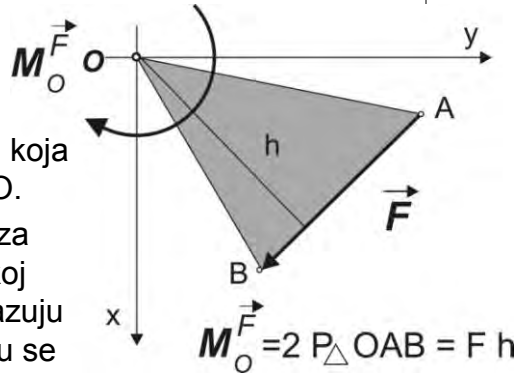
- Intenzitet momenta sile F za tačku u slučaju da je F različito od nule, jednak je nuli kada je krak $h=0$ odnosno kada se tačka nalazi na pravcu dejstva sile (na napadnoj liniji dejstva)



18

Intenzitet momenta sile za tačku

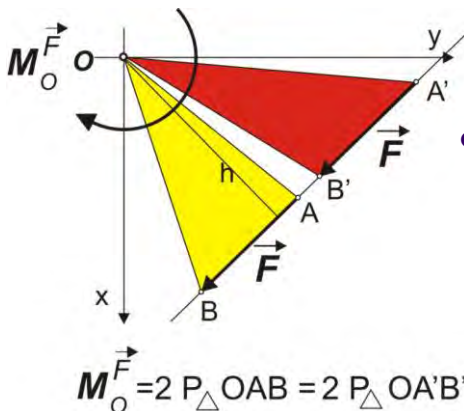
- Posmatramo silu u ravni koja pravi moment za tačku O.
- Intenzitet momenta sile za tačku jednak je dvostrukoj površini trougla koji obrazuju vektor sile i tačka za koju se izračunava moment.



19

Intenzitet momenta sile za tačku

$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$



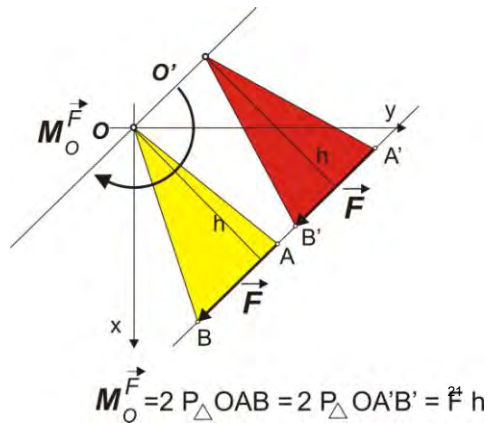
- Intenzitet momenta sile F za tačku se ne menja ako se sila pomera duž napadne linije

20

Intenzitet momenta sile za tačku

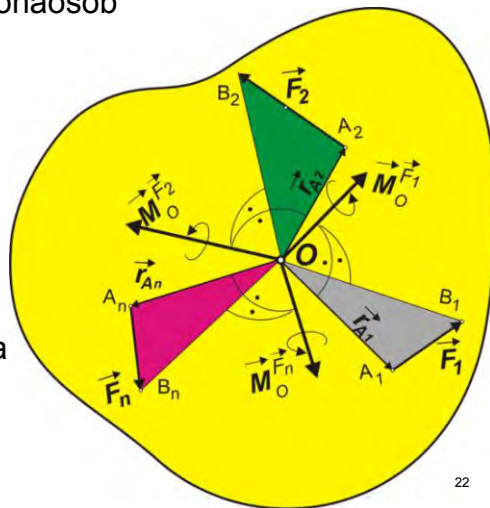
$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$

- Intenzitet momenta sile za tačku se ne menja i ako se tačka pomera po pravoj paralelnoj napadnoj liniji sile

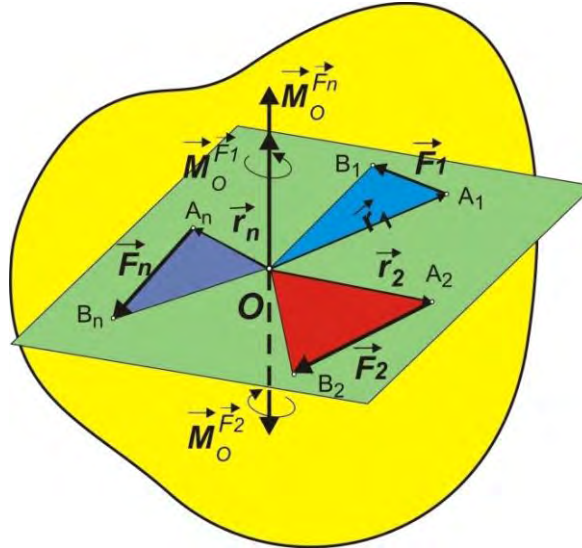


Dejstvo više sila na telo koje može da se obrće oko tačke

- Obrtni efekat svake sile ponaosob
- Za svaku silu utvrditi:
 - Ravan obrtanja
 - Intezitet obrtanja
 - Smer obrtanja
- Prikazati sve obrtne momente za tačku O
- Na dobijene momente sile za tačku primeniti pravila vektorske algebre



Ako na telo koje može da se obrće oko tačke O deluje ravan sistem sila



23

Ako na telo koje može da se obrće oko tačke O deluje ravan sistem sila



- Napadne linije svih sila leže u jednoj ravni
- Tačka obrtanja leži u ravni obrtanja
- Svi vektori koji leže u istoj ravni i tačka obrtanja u toj ravni ostvaruju svoj obrtni efekat u toj ravni – ravan obrtanja im je zajednička
- Momenti obrtanja oko tačke O tada su kolinearni vektori
- U tom slučaju ukupan rezultujući moment sila za tačku A jednak je algebarskom zbiru momenata komponenta

24

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod

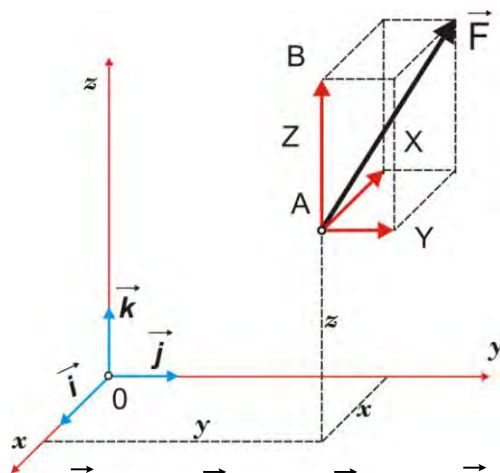


- Ako sila \vec{F} deluje u tački A
- Položaj tačke A može se odrediti vektorom položaja tačke A u Dekartovom koordinatnom sistemu
- Usvojiti koordinatni početak za početak vektora položaja i tačku O oko se koje vrši obrtanje za koordinatni početak
- Moment sile za tačku O definiše se kao vektorski proizvod

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

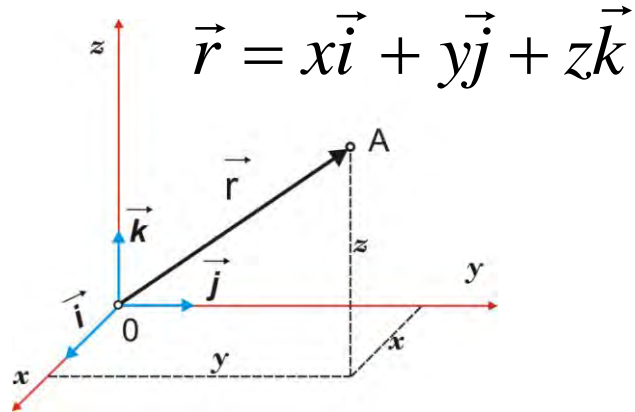
25

Sila kao vektor u Dekartovom koordinatnom sistemu



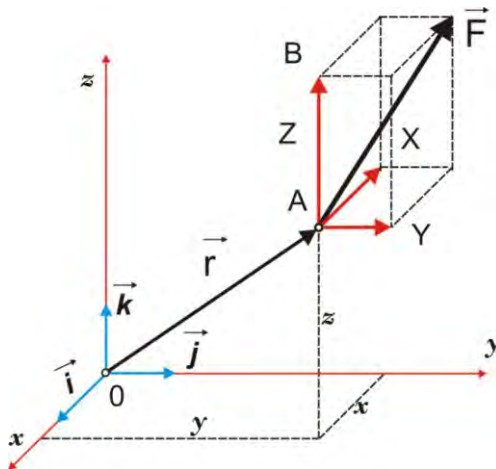
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

Vektor položaja tačke A u Dekartovom koordinatnom sistemu



27

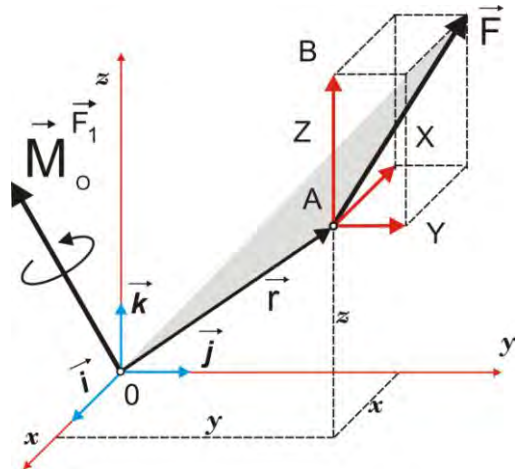
Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

28

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

29

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Vektor momenta sile za tačku se može, kao i svaki drugi vektor, prikazati preko tri upravne koordinate

30

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = M_{Ox}^{\vec{F}} \vec{i} + M_{Oy}^{\vec{F}} \vec{j} + M_{Oz}^{\vec{F}} \vec{k}$$

Vektor momenta sile za tačku se može, kao i svaki drugi vektor, prikazati preko tri upravne koordinate

31

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= M_{Ox}^{\vec{F}} \vec{i} + M_{Oy}^{\vec{F}} \vec{j} + M_{Oz}^{\vec{F}} \vec{k}$$

32

Moment sile za tačku



Intenziteti komponentata momenta sile za tačku po osama

$$M_{Ox}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = yZ - zY$$

$$M_{Oy}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} = zX - xZ$$

$$M_{Oz}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = xY - yX$$

33

Moment sile za tačku



Intenzitet vektora momenta sile za tačku

$$|\vec{M}_O^{\vec{F}}| = \sqrt{(M_{Ox}^{\vec{F}})^2 + (M_{Oy}^{\vec{F}})^2 + (M_{Oz}^{\vec{F}})^2}$$

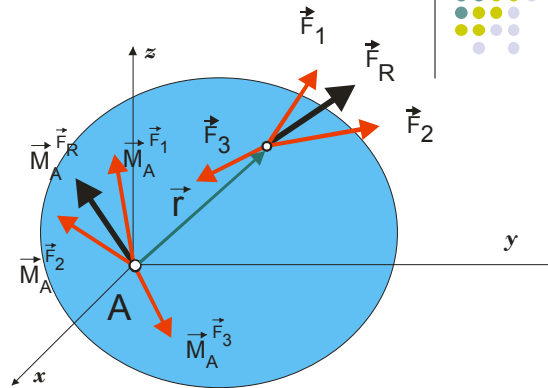
Pravac vektora momenta sile za tačku

$$\cos \alpha_M = \frac{M_{Ox}^{\vec{F}}}{|\vec{M}_O^{\vec{F}}|} \quad \cos \beta_M = \frac{M_{Oy}^{\vec{F}}}{|\vec{M}_O^{\vec{F}}|} \quad \cos \gamma_M = \frac{M_{Oz}^{\vec{F}}}{|\vec{M}_O^{\vec{F}}|}$$

34

Varinjonova teorema

Moment rezultante za tačku jednak je zbiru momenata komponenata za istu tačku



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n)$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

35

Rezime:

- Moment sile za tačku je mera obrtnog dejstva tela koje može da se okreće oko tačke
- Moment sile za tačku je vektor vezan za tu tačku
- Intenzitet je jednak proizvodu sile i normalnog rastojanja
- Pravac dejstva je upravan na ravan dejstva definisane silom i napadnom tačkom
- Smer – pozitivan u suprotnom smeru kazaljke na časovniku posmatran iz vrha vektora

36

Rezime:



- Moment sile za tačku je vektorski proizvod vektora sile i vektora položaja napadne tačke sile u Dekartovom koordinatnom sistemu
- Projekcije momenta sile kao vektora na ose Dekartovog pravouglog sistema
- Vrednost momenta sile za tačku se izračunava, kao i kod svakog drugog vektora, kao koren zbira kvadrata projekcija na ose
- Pravac je definisan kosinusima uglova koji imaju vrednost količnika projekcije sile na osu i vrednosti vektora

37

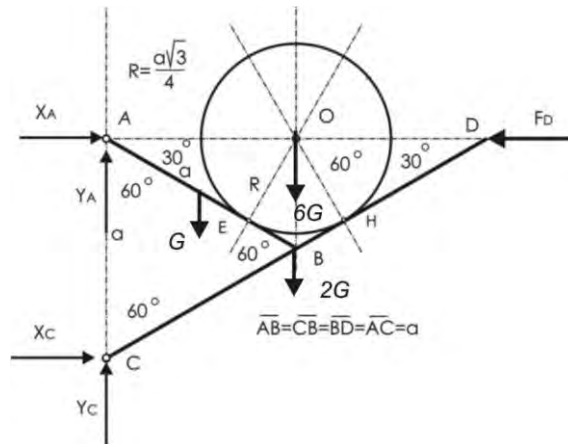
Rezime:



- Vrednost momenta sile za tačku se ne menja ako silu pomerimo duž napadne linije dejstva
- Vrednost momenta sile za tačku se ne menja ako tačku pomerimo duž paralelne linije napadnoj linije dejstva sile
- Moment rezultante za tačku jednak je zbiru momenata komponentata za tu istu tačku

38/38

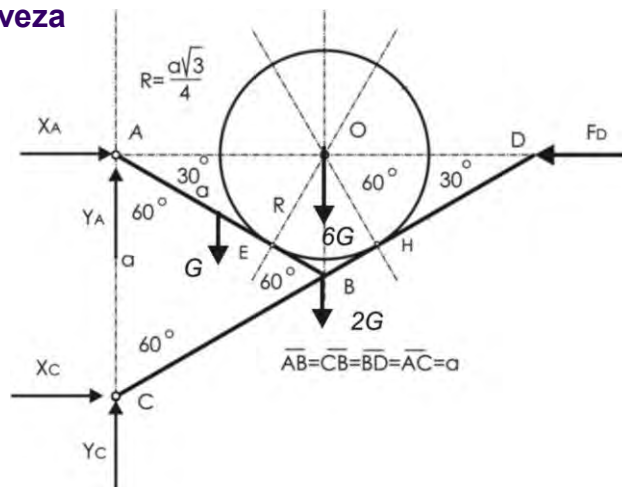
Primer:



- osloboditi se oslonaca i uvesti reakcije veza
- 5 nepoznatih reakcija X_A, Y_A, X_C, Y_C, F_D
- 3 uslova ravnoteže
- neophodno rastaviti sistem na elemente

41

reakcije veza



- odrediti nepoznata rastojanja i definisati uglove na slici ravnotežnog položaja

42

reakcije veza

$R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{AC} = a$

- trougao ABC je jednakostranični pa je ugao između AB i CB 60°
- trougao ABD jednakokraki i ugao kod temena B je 120° pa su uglovi kod temena A i D po 30°

43

reakcije veza

$R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{AC} = a$

- disk se oslanja o štapove (normala na dodirnu ravan i prolaze kroz O) pa su trouglovi AEO i DHO pravougli sa uglovima od 30° kod temena A i D

44

Primer:

- iz pravouglog trougla ABO

$$\overline{AO} = a \cos 30^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \overline{BO} = a \sin 30^\circ = a \frac{1}{2}$$

- iz pravouglog trougla AEO

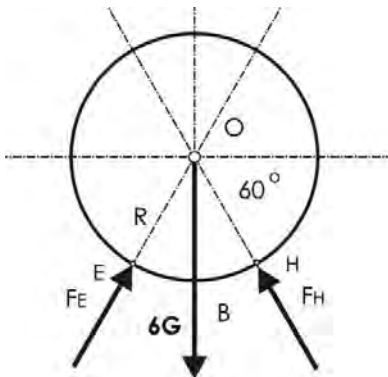
$$\overline{AE} = \overline{AO} \cos 30^\circ = a \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \frac{3}{4}$$

rastavljamo sistem na

$$R = a \frac{\sqrt{3}}{4}$$

- disk 2 uslova ravnoteže
- stap AB 3 uslova ravnoteže
- štap CD 3 uslova ravnoteže
- sistem 3 uslova ravnoteže
- unutrašnje sile posl. rastavljanja
- diska na štapove FE i FH
- pritisak između štapova FB
- ukupno 11 uslova ravnoteže
- nepoznatih reakcija 8
- odabrati 8 jednačina

45

ravnoteža diska

- dve nepoznate
- dva uslova ravnoteže ili zatvoren trougao sila sinusna teorema

$$\sum X_i = F_E \sin 30^\circ - F_H \sin 30^\circ = 0$$

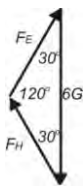
$$\rightarrow F_E = F_H$$

$$\sum Y_i = F_E \cos 30^\circ - 6G + F_H \cos 30^\circ = 0$$

$$\rightarrow F_H \sqrt{3} = 6G \rightarrow F_H = 2\sqrt{3}G$$

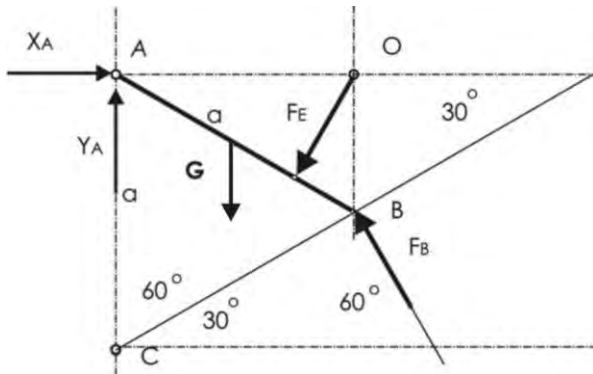
$$\frac{F_E}{\sin 30^\circ} = \frac{F_H}{\sin 30^\circ} = \frac{6G}{\sin 120^\circ}$$

$$F_E = F_H = \frac{6G \sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} 6G = 2\sqrt{3}G$$



46

ravnoteža štapa AB



$$F_B = \frac{7\sqrt{3}}{2} G$$

$$X_A = \frac{11\sqrt{3}}{4} G$$

$$Y_A = \frac{5}{4} G$$

$$\sum X_i = X_A - F_E \sin 30^\circ - F_B \sin 30^\circ = 0$$

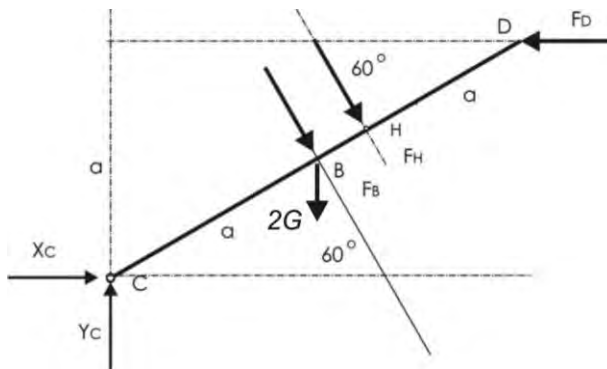
$$\sum Y_i = Y_A - F_E \cos 30^\circ - F_B \cos 30^\circ - G = 0$$

$$\sum M_A = G \frac{a}{2} \sin 60^\circ + F_E a \frac{3}{4} - F_B \sin 60^\circ a \sin 60^\circ + F_B \cos 60^\circ a \cos 60^\circ = 0$$

$$F_B a \left(\frac{11}{22} - \frac{\sqrt{3}\sqrt{3}}{22} \right) = -G \frac{a\sqrt{3}}{22} - 2\sqrt{3} G a \frac{3}{4}$$

47

ravnoteža štapa CD



$$F_D = 7\sqrt{3} G$$

$$X_C = \frac{17\sqrt{3}}{4} G$$

$$Y_C = \frac{31}{4} G$$

$$\sum X_i = X_C - F_H \cos 60^\circ - F_B \cos 60^\circ - F_D = 0$$

$$\sum Y_i = Y_C - F_H \sin 60^\circ - F_B \sin 60^\circ - 2G = 0$$

$$\sum M_C = 2G a \cos 30^\circ + F_H \left(2a - \frac{3}{4} \right) + F_B a - F_D 2a \sin 30^\circ = 0$$

$$\sum M_C = 2G a \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} G \frac{5}{4} + \frac{7\sqrt{3}}{2} G a - F_D 2a \frac{1}{2} = 0$$

$$F_D = \left(1 + \frac{5}{2} + \frac{7}{2} \right) \sqrt{3} G$$

48

ravnoteža sistema

$R = \frac{a\sqrt{3}}{4}$
 $\overline{AB} = \overline{CB} = \overline{BD} = \overline{AC} = a$

$F_B = \frac{7\sqrt{3}}{2} G$
 $X_A = \frac{11\sqrt{3}}{4} G$
 $Y_A = \frac{5}{4} G$

$\sum X_i = X_C + X_A - F_D = 0$
 $\sum Y_i = Y_A + Y_C - G - 6G - 2G = 0$

$\sum M_A = X_C a + G \frac{a}{2} \sin 60^\circ + 2G a \sin 60^\circ + 6G a \sin 60^\circ - F_D 2a \sin 30^\circ = 0$

$F_D = 7\sqrt{3} G \quad Y_C = \frac{31}{4} G \quad X_C = \frac{17\sqrt{3}}{4} G$

49