

## Paralelne sile u ravni MOMENT SILE ZA TAČKU

- Pojam momenta sile za tačku
- Predstavljanje momenta sile za tačku kao vektora
- Moment sile za tačku kao vektorski proizvod vektora položaja i vektora sile



1

## Osnovni statički elementi

- **Sila** - klizeći vektor čije je dejstvo translatorno
- **Moment sile za tačku** - vezan vektor i njegovo dejstvo je obrtno
- **Spreg sile** - slobodan vektor i njegovo dejstvo je čisto obrtanje

Iako su sva tri elementa vektori

***ne mogu se međusobno sabirati***



2

## Moment sile za tačku



- Kretanje tela izazivaju sile.  
U opštem slučaju kretanja se dele na:
  - Pravolinijsko kretanje ili translaciju  
Uslovljava ga rezultatna sila i ostvaruje se u pravcu napadne linije sile i u smeru dejstva sile
  - Obrtno kretanje ili rotacija  
Uslovljava ga novi statički element, moment sile

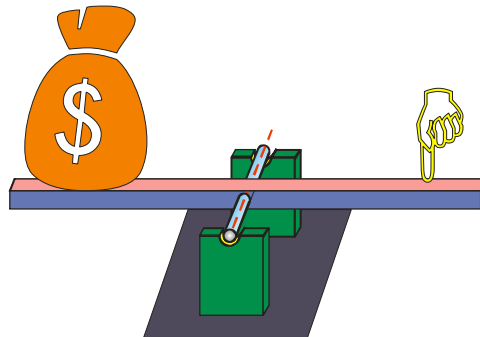
3

## PODSEĆANJE

## Moment sile za osu



- Moment sile za osu izaziva obrtanje oko te ose
- Ravan delovanja momenta je upravna na osu obrtanja
- Moment sile za osu je mera težnje sile da okrene telo oko te ose



4

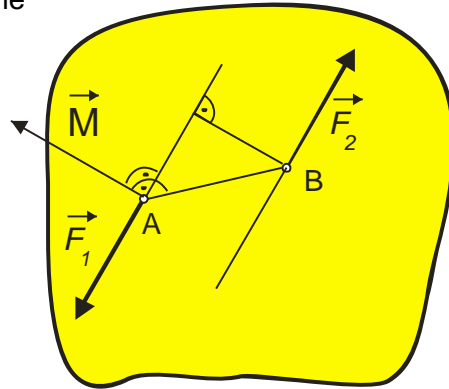
## Paralelne sile u ravni **PODSEĆANJE**

slaganje dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova, koje ne leže na istoj napadnoj liniji



Kada na telo deluju dve paralelne sile istih intenziteta, suprotnih smerova, a da nisu na istoj napadnoj liniji, rezultanta je jednaka nuli, ali telo nije u ravnoteži zbog postojanja rezultujućeg momenta

Vektor sprega sile  $\vec{M}$



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

5

## Spreg sile

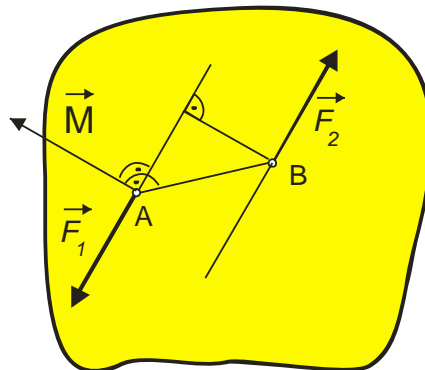
## **PODSEĆANJE**

slaganje dve paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova, koje ne leže na istoj napadnoj liniji



- Moment sprega sile u odnosu na proizvoljnu tačku jednak je momentu jedne sile sprega u odnosu na napadnu tačku druge sile sprega.
- Moment sprega sile zavisi od intenziteta sile koje obrazuju spreg, najkraćeg rastojanja između njih i ravni u kojoj deluju.

$\vec{M}$



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

6

## PODSEĆANJE



### Spreg sila definišu

1. Intenziteti sila  $\vec{F}$  i normalnog rastojanja između sila
2. Položaj ravni određene silama  $\vec{F}$ , time je definisan pravac dejstva
3. Smer obrtanja u ravni

Obrtni efekat sile oko tačke karakterišu tri veličine, pa pripada klasi **VEKTORA**

7

## PODSEĆANJE



### Vektor sprega sila

- Vektor sprega sila je vektorska veličina
- Pravac vektora je normala na ravan dejstva sprega – ravan koju obrazuju paralelne sile istih intenziteta, a suprotnih smerova
- Smer je takav da se iz vrha vektora posmatrana rotacija vidi u matematički pozitivnom smeru
- Intenzitet vektora je proizvod jedne sile i normalnog rastojanja između sila

8

## PODSEĆANJE



### Vektor sprega sila

- Kao što se primećuje, vektor sprega sila se ne vezuje za napadnu tačku već za ravan, pa se spreg sila naziva i

### PLIVAJUĆI VEKTOR



U označavanju sprega se ne naglašava tačka delovanja

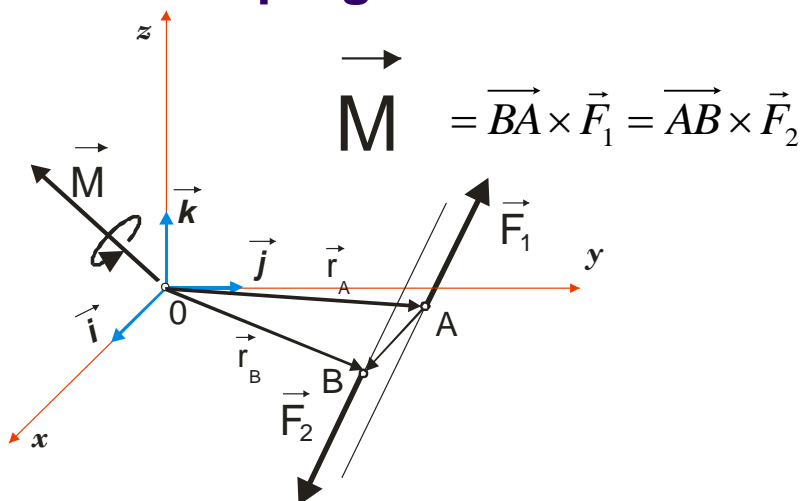
Jedinica je Nm

9

## PODSEĆANJE



### Vektor sprega sila

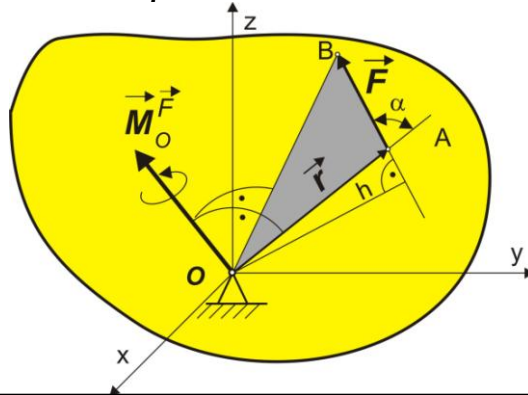


Ovo se dokazuje, zbog obima kursa dokaz neće biti pokazan, a ima ga u preporučenoj literaturi

10

## Moment sile za tačku

Pojam momenta sile za tačku nastao je kao rezultat određivanja obrtnog efekta sile koja deluje na kruto telo koje se može obrtiti oko jedne tačke.



11

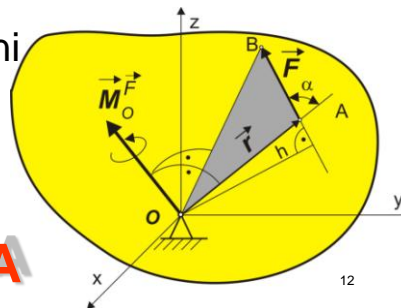
## Moment sile za tačku

• Obrtni efekat sile oko tačke O zavisi od:

1. Intenziteta sile  $\vec{F}$  i kraka  $h$  – normalnog rastojanja od obrtne tačke do napadne linije sile
2. Položaja obrtanja ravni OAB određene obrtnom tačkom O i silom  $\vec{F}$
3. Smera obrtanja u toj ravni

Obrtni efekat sile oko tačke karakterišu tri veličine, pa pripada klasi

**VEKTORA**



12

## Moment sile za tačku karakterišu



- Intenzitet  $M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$
- Pravac – upravan na ravan dejstva
- Smer – u stranu odakle se iz vrha vektora okretanje silom vidi u smeru suprotnom od smeru kazaljke na časovniku

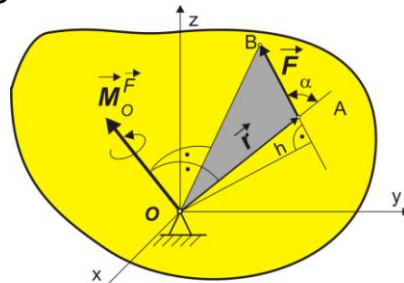
13

## Intenzitet momenta sile za tačku



- Intenzitet momenta sile  $\vec{F}$  za tačku O naziva se veličina koja je jednaka proizvodu iz inteziteta sile i kraka sile

$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$



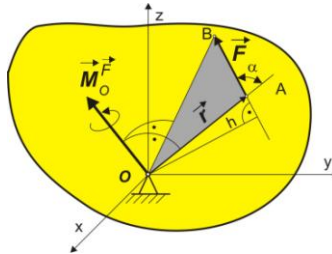
Jedinica mere je Njutr-metar Nm

14

## Pravac momenta sile za tačku

- Pravac momenta sile za tačku je upravan na ravan dejstva momenta. Ravan dejstva momenta sile za tačku definišu sila i tačka obrtanja.

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

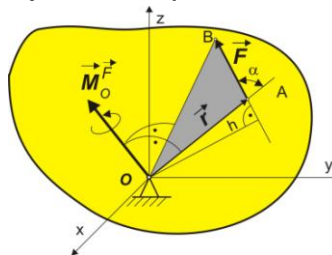


15

## Smer momenta sile za tačku

- Pozitivan **smer obrtanja** je takav da posmatran iz vrha vektora na ravan obrtanja vidi okretanje u matematički pozitivnom smeru, to jest u smeru suprotnom od smera okretanja satnih kazaljki
- Može se primeniti i pravilo desne ruke: ako se prsti desne ruke poklope sa smerom dejstva sile, palac pokazuje smer dejstva momenta

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$



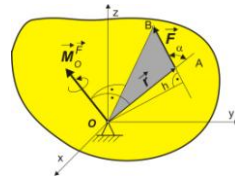
16



## Intenzitet momenta sile za tačku

$$|\vec{M}_O^{\vec{F}}| = F \cdot h$$

- Intenzitet momenta sile  $F$  za tačku se ne menja ako se sila pomera duž napadne linije
- Intenzitet momenta sile za tačku se ne menja i ako se tačka pomera po pravoj paralelnoj napadnoj liniji sile

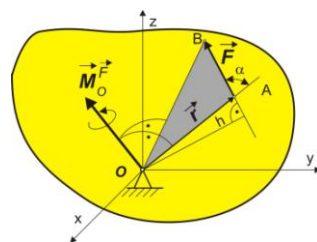
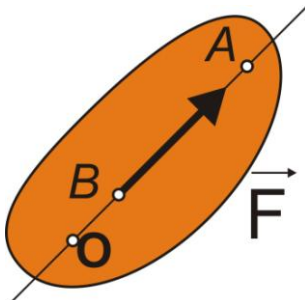


17

## Intenzitet momenta sile za tačku

$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$

- Intenzitet momenta sile  $F$  za tačku u slučaju da je  $F$  različito od nule, jednak je nuli kada je krak  $h=0$  odnosno kada se tačka nalazi na pravcu dejstva sile (na napadnoj liniji dejstva)

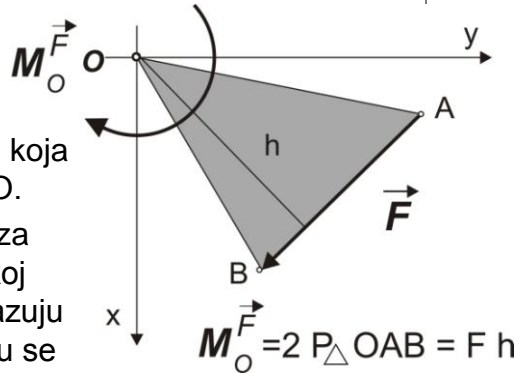


18

## Intenzitet momenta sile za tačku



- Posmatramo silu u ravni koja pravi moment za tačku O.
- Intenzitet momenta sile za tačku jednak je dvostrukoj površini trougla koji obrazuju vektor sile i tačka za koju se izračunava moment.

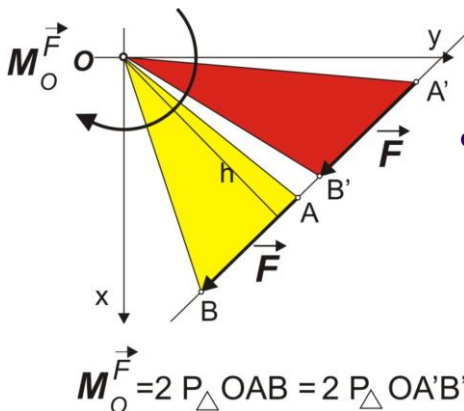


19

## Intenzitet momenta sile za tačku



$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$



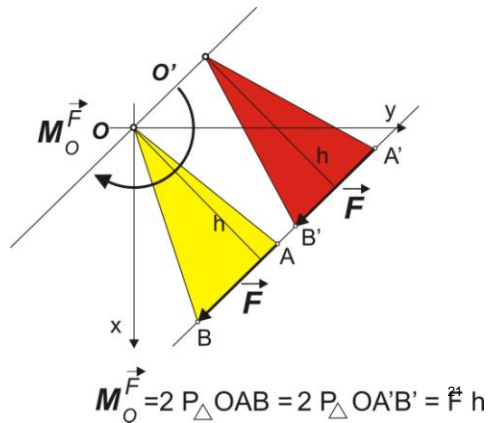
- Intenzitet momenta sile F za tačku se ne menja ako se sila pomera duž napadne linije

20

## Intenzitet momenta sile za tačku

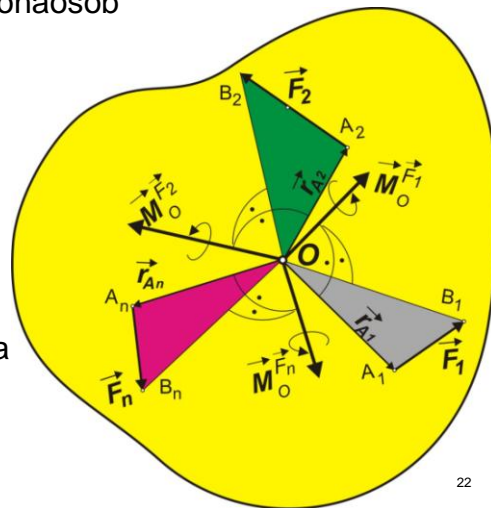
$$M_O^{\vec{F}} = F \cdot h$$

- Intenzitet momenta sile za tačku se ne menja i ako se tačka pomera po pravoj paralelnoj napadnoj liniji sile

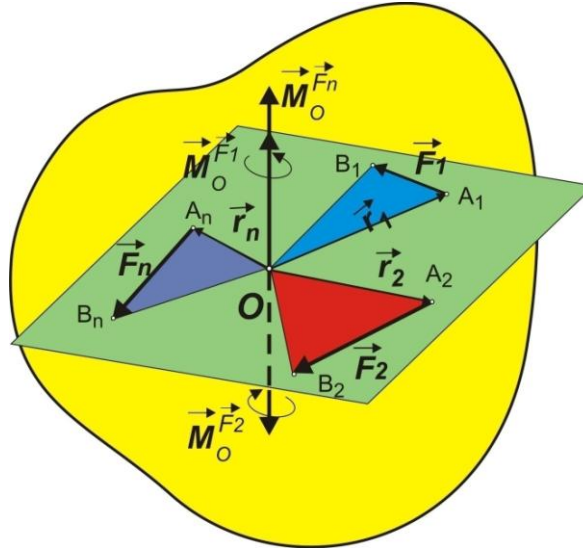


## Dejstvo više sila na telo koje može da se obrće oko tačke

- Obrtni efekat svake sile ponaosob
- Za svaku silu utvrditi:
  - Ravan obrtanja
  - Intezitet obrtanja
  - Smer obrtanja
- Prikazati sve obrtne momente za tačku O
- Na dobijene momente sile za tačku primeniti pravila vektorske algebre



## Ako na telo koje može da se obrće oko tačke O deluje ravan sistem sila



23

## Ako na telo koje može da se obrće oko tačke O deluje ravan sistem sila



- Napadne linije svih sila leže u jednoj ravni
- Tačka obrtanja leži u ravni obrtanja
- Svi vektori koji leže u istoj ravni i tačka obrtanja u toj ravni ostvaruju svoj obrtni efekat u toj ravni – ravan obrtanja im je zajednička
- Momenti obrtanja oko tačke O tada su kolinearni vektori
- U tom slučaju ukupan rezultujući moment sila za tačku A jednak je algebarskom zbiru momenata komponenta

24

## Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod

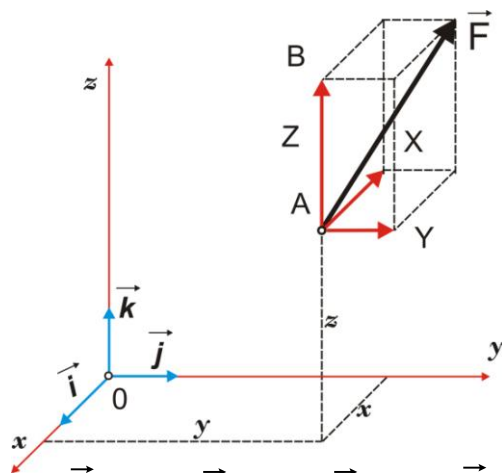


- Ako sila  $\vec{F}$  deluje u tački A
- Položaj tačke A može se odrediti vektorom položaja tačke A u Dekartovom koordinatnom sistemu
- Usvojiti koordinatni početak za početak vektora položaja i tačku O oko se koje vrši obrtanje za koordinatni početak
- Moment sile za tačku O definiše se kao vektorski proizvod

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

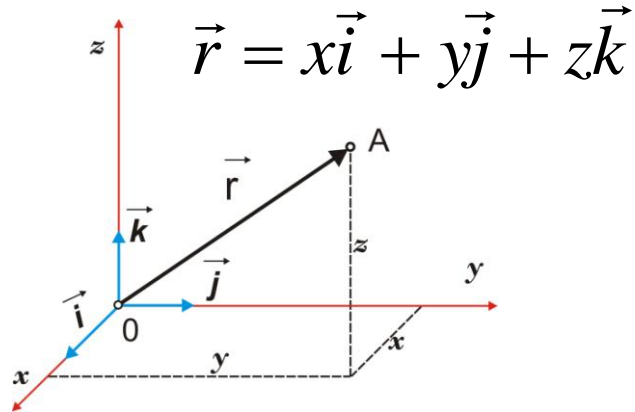
25

## Sila kao vektor u Dekartovom koordinatnom sistemu



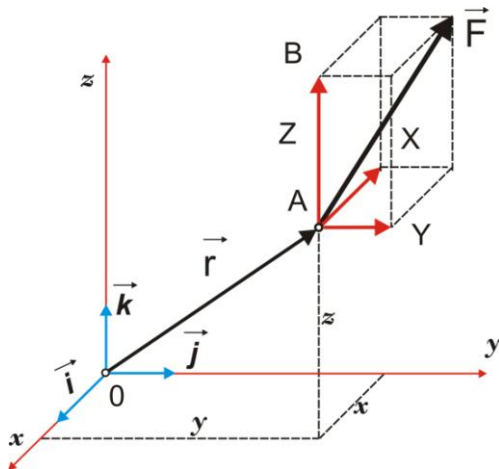
$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

## Vektor položaja tačke A u Dekartovom koordinatnom sistemu



27

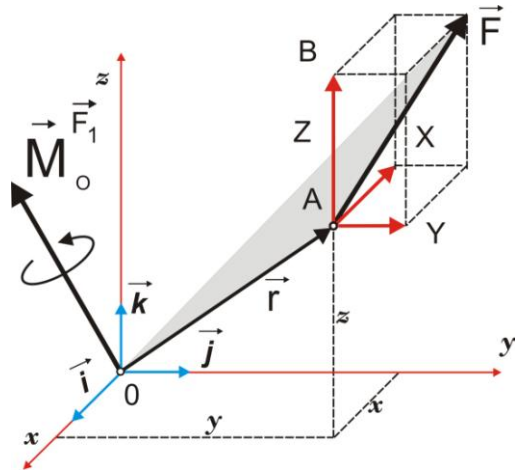
## Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

28

## Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

29

## Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Vektor momenta sile za tačku se može, kao i svaki drugi vektor, prikazati preko tri upravne koordinate

30

## Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = M_{Ox}^{\vec{F}} \vec{i} + M_{Oy}^{\vec{F}} \vec{j} + M_{Oz}^{\vec{F}} \vec{k}$$

Vektor momenta sile za tačku se može, kao i svaki drugi vektor, prikazati preko tri upravne koordinate

31

## Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= M_{Ox}^{\vec{F}} \vec{i} + M_{Oy}^{\vec{F}} \vec{j} + M_{Oz}^{\vec{F}} \vec{k}$$

32



## Moment sile za tačku



Intenziteti komponentata momenta sile za tačku po osama

$$M_{Ox}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = yZ - zY$$

$$M_{Oy}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} = zX - xZ$$

$$M_{Oz}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} = xY - yX$$

33

## Moment sile za tačku



Intenzitet vektora momenta sile za tačku

$$|\vec{M}_O^{\vec{F}}| = \sqrt{(M_{Ox}^{\vec{F}})^2 + (M_{Oy}^{\vec{F}})^2 + (M_{Oz}^{\vec{F}})^2}$$

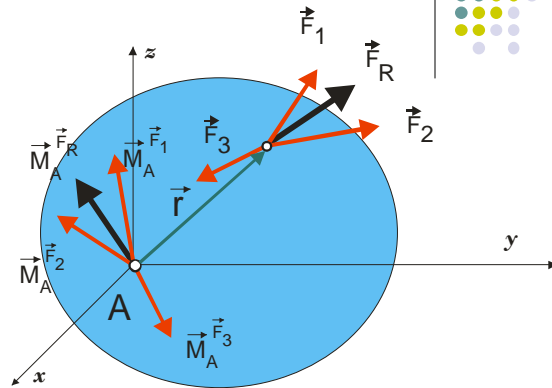
Pravac vektora momenta sile za tačku

$$\cos \alpha_M = \frac{M_{Ox}^{\vec{F}}}{|\vec{M}_O^{\vec{F}}|} \quad \cos \beta_M = \frac{M_{Oy}^{\vec{F}}}{|\vec{M}_O^{\vec{F}}|} \quad \cos \gamma_M = \frac{M_{Oz}^{\vec{F}}}{|\vec{M}_O^{\vec{F}}|}$$

34

## Varinjonova teorema

Moment rezultante za tačku jednak je zbiru momenata komponentata za istu tačku



$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_R = \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_n)$$

$$\vec{M}_A^{(\vec{F}_R)} = \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_n$$

35

## Rezime:

- Moment sile za tačku je mera obrtnog dejstva tela koje može da se okreće oko tačke
- Moment sile za tačku je vektor vezan za tu tačku
- Intenzitet je jednak proizvodu sile i normalnog rastojanja
- Pravac dejstva je upravan na ravan dejstva definisane silom i napadnom tačkom
- Smer – pozitivan u suprotnom smeru kazaljke na časovniku posmatran iz vrha vektora

36

## Rezime:

- Moment sile za tačku je vektorski proizvod vektora sile i vektora položaja napadne tačke sile u Dekartovom koordinatnom sistemu
- Projekcije momenta sile kao vektora na ose Dekartovog pravouglog sistema
- Vrednost momenta sile za tačku se izračunava, kao i kod svakog drugog vektora, kao koren zbira kvadrata projekcija na ose
- Pravac je definisan kosinusima uglova koji imaju vrednost količnika projekcije sile na osu i vrednosti vektora

37

## Rezime:

- Vrednost momenta sile za tačku se ne menja ako silu pomerimo duž napadne linije dejstva
- Vrednost momenta sile za tačku se ne menja ako tačku pomerimo duž paralelne linije napadnoj linije dejstva sile
- Moment rezultante za tačku jednak je zbiru momenata komponentata za tu istu tačku

38/38