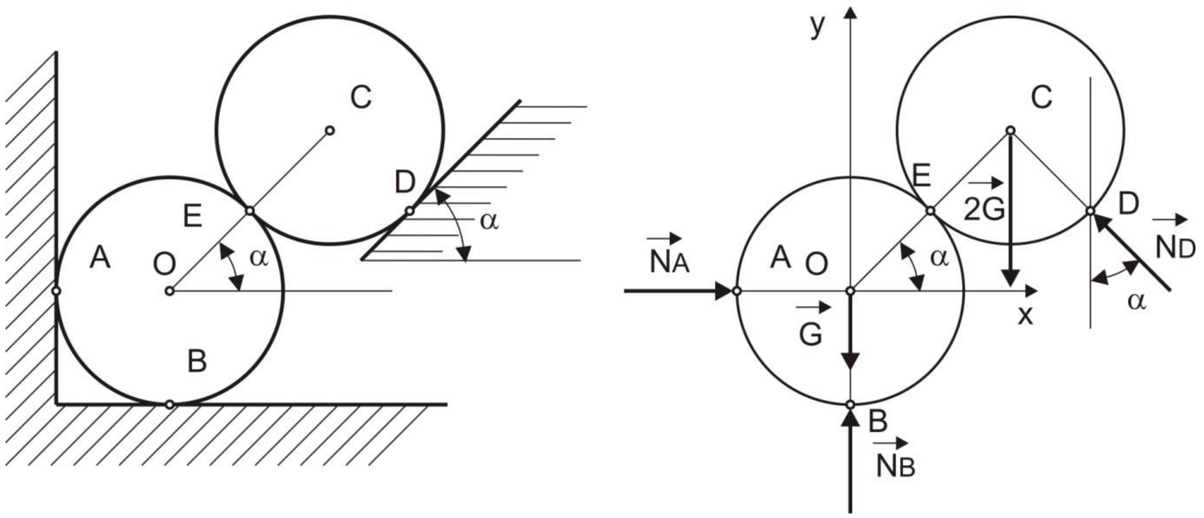
Primer 2.1 (L.Vujošević 26)

Homogena kugla O, težine G, leži na horizontalnoj ravni, a tačkom A se oslanja na vertikalni zid. Druga homogena kugla C, težine 2G, oslanja se tačkom E na kuglu O, a tačkom D na strmu ravan nagiba α. Kugle imaju jednake prečnike a prava koja spaja središta kugli paralelna je sa linijom najvećeg pada strme ravni.

Odrediti reakcije horizontalne, vertikalne i kose ravni, ako je $\cos\alpha=3/5$.



$$\sum X_i = N_A - N_D sin\alpha = 0 \rightarrow N_A = N_D sin\alpha$$

$$\sum Y_i = N_B + N_D cos\alpha - G - 2G = 0 \ \rightarrow N_B = 3G - N_D cos\alpha$$

$$\sum M_O = 2G(2Rcos\alpha) - N_D 2R = 0 \rightarrow N_D = 2Gcos\alpha = G\frac{6}{5} = 1{,}2G$$

$$sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$$

$$sin\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{9}{25}} = \frac{4}{5}$$

$$N_D = \frac{6}{5}G$$

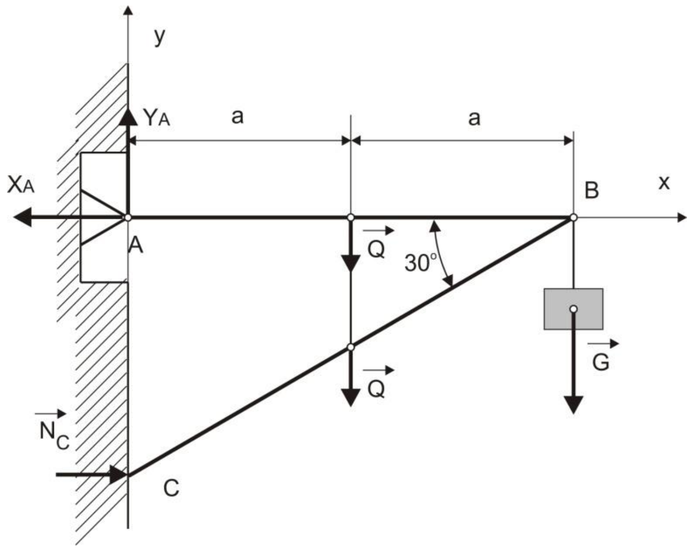
$$N_A = N_D sin\alpha = N_D\frac{4}{5} = \frac{4}{5}\cdot\frac{6}{5}G = \frac{24}{25}G$$

$$N_B = 3G - N_D cos\alpha = 3\mathrm{G} - \mathrm{G}\frac{6}{5}\cdot\frac{4}{5} = \frac{75-24}{25}\mathrm{G} = \frac{51}{25}\mathrm{G}$$

Primer 2.2

Horizontalna homogena greda AB, težine Q, dužine 2a, vezana je zglobno u tački A, a u tački B nosi teret G. Za kraj B grede AB vezana je zglobno greda BC, težine Q, koja se u tački C oslanja o glatki vertikalni zid, a u težištu je vezana vertikalnim užetom za gredu AB.

Odrediti reakcije u zglobu A i osloncu C, kao i silu u užetu, ako je greda BC nagnuta pod uglom od 30° prema horizontali.



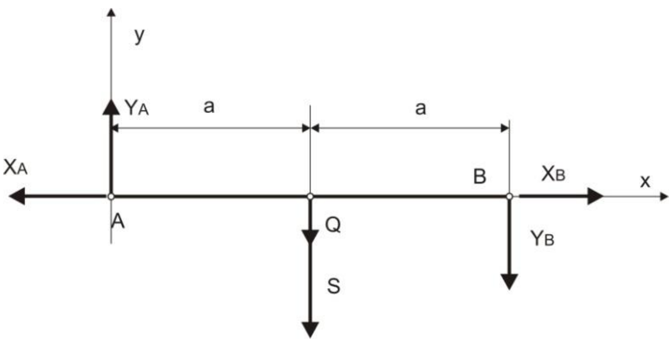
Rešavanjem sistema kao celine određuju se reakcije u zglobu A i normalna reakcija u tački C.

$$\sum M_A = N_C \cdot a\,tg30° - G \cdot 2a - Q \cdot a - Q \cdot a = 0 \rightarrow N_C = \frac{2Q+2G}{2tg30°} = \frac{Q+G}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = (Q+G)\sqrt{3}$$

$$\sum X_i = -X_A + N_c = 0 \rightarrow X_A = N_c = (Q+G)\sqrt{3} \qquad X_A = N_c = (Q+G)\sqrt{3}$$

$$\sum Y_i = Y_A - 2Q - G = 0 \rightarrow Y_A = 2Q + G \qquad Y_A = 2Q + G$$

Rastavljanjem sistema na elemente određuje se sila u užetu

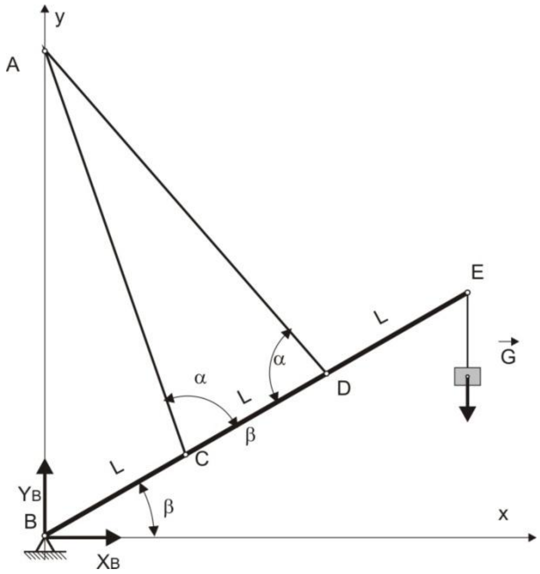


$$\sum M_B = -Y_A 2a + Qa + Sa = 0 \rightarrow S = 2Y_A - Q = 4Q + 2G - Q = 3Q + 2G$$

$$S = 3Q + 2G$$

Primer 2.3

O kraj E, štapa BE, pričvršćenog u tački B pomoću zgloba, obešen je teret G. U tčkama C i D za štap je povezan gipki konac, koji prebačen preko kotura A. Poznato je BC=DE=CD i AC=AD. Odrediti reakcije kotura i zgloba. Težinu štapa i trenje zanemariti. Uglovi α i β su poznati.



$$\overline{BC} = \overline{DE} = \overline{CD} = L$$

$$\overline{AC} = \overline{AD}$$

$$sin2\beta = 2cos\beta sin\beta \qquad cos2\beta = cos^2\beta - sin^2\beta$$
$$cos^2\beta + sin^2\beta = 1$$

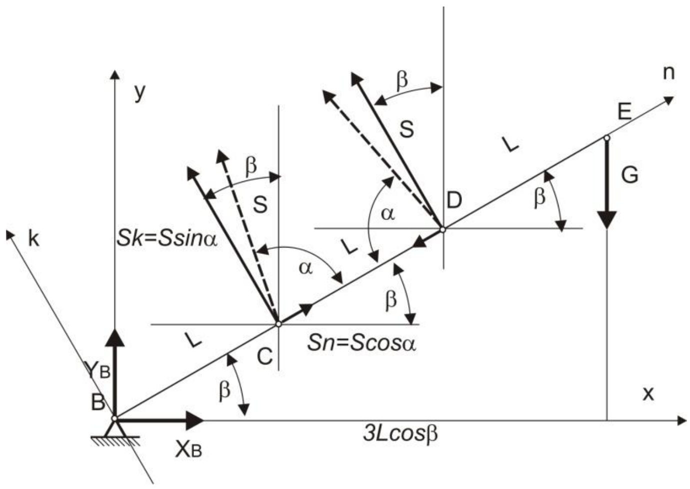
$$\sum M_B = 0$$

$$\sum X_B = 0$$

$$\sum Y_B = 0$$

Sile u koncima su iste S

Sile u koncima razložiti na silu normalnu na štap i silu u pravcu štapa



$$\sum M_B = SLsin\alpha + SLsin\alpha - 3GLcos\beta = 0 \rightarrow S = G\frac{cos\beta}{sin\alpha}$$

$$\sum X_i = X_B + Scos\alpha cos\beta - Ssin\alpha sin\beta - Scos\alpha cos\beta - Ssin\alpha sin\beta = 0 \rightarrow X_B = 2Ssin\alpha sin\beta$$

$$X_B = 2G\frac{cos\beta}{sin\alpha}sin\alpha sin\beta = G(2cos\beta sin\beta) = Gsin2\beta$$

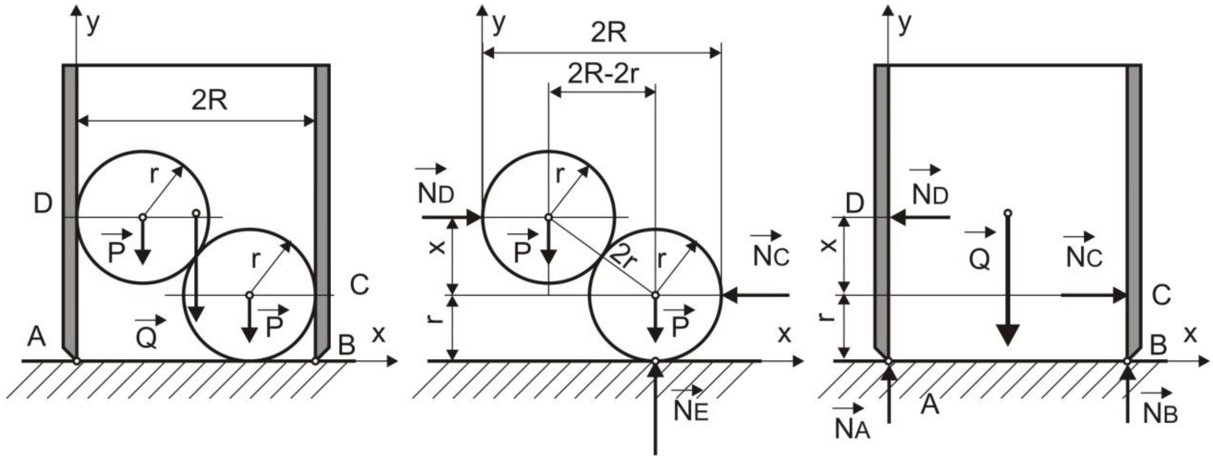
$$\sum Y_i = Y_B + Scos\alpha sin\beta + Ssin\alpha cos\beta - Scos\alpha cos\beta + Ssin\alpha cos\beta - G = 0 \rightarrow Y_B$$

$$Y_B = G - 2Ssin\alpha cos\beta = G\left(1 - 2\frac{cos\beta}{sin\alpha}sin\alpha cos\beta\right) = G(1 - 2cos^2\beta)$$

$$Y_B = G[(1 - cos^2\beta) - cos^2\beta] = G(sin^2\beta - cos^2\beta) = -Gcos2\beta$$

Primer 2.4 (M.1.154)

Homogena kružna cilindrična cev, unutrašnjeg poluprečnika R, postavljena je na glatku horizontalnu ravan. U cev su spuštene dve homogene kugle, poluprečnika r i jednake težine P. Odrediti najmanju težinu cevi Q da je kugle ne bi prevrnule.



Prvo odreditinormalnu silu pritiska kuglica na cev analizom samo kuglca

$\sum X_i = N_D - N_C = 0 \rightarrow N_D = N_C$

$\sum Y_i = N_E - P - P = 0 \rightarrow N_E = 2P$

$\sum M_E = -N_D(r+x) + N_C r + P(2R-2r) = 0 \rightarrow N_D = \frac{P(2R-2r)}{x}$

$x^2 = (2r)^2 - (2R-2r)^2 = 4r^2 - 4R^2 + 8Rr - 4r^2 \rightarrow x = \sqrt{-4R^2+8Rr} = 2R\sqrt{\frac{2r}{R}-1}$

$N_D = N_C = P\frac{(2R-2r)}{2R\sqrt{\frac{2r}{R}-1}} = -P\frac{\frac{r}{R}-1}{\sqrt{\frac{2r}{R}-1}}$

Ravnoteža za samu cev da se ne bi prevrnula moment u tačkama dodira mora biti 0.

$\sum M_A = -N_D(r+x) + N_C r + QR = 0$

$-N_D r - N_D x + N_D r + QR = 0 \rightarrow QR = N_D x = \frac{P(2R-2r)}{x}\cdot x \rightarrow Q = \frac{P(2R-2r)}{R} = 2P\left(1-\frac{r}{r}\right)$

DRUGO REŠENJE

Za cev da se ne bi prevrnula moment u tačkama dodira za sistem kao celinu mora biti 0.

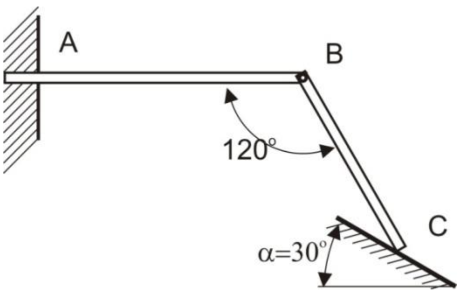
$\sum M_A = N_E(2R-r) - Pr - P(2R-r) - QR = 0$

$2P(2R-r) - Pr - P(2R-r) - QR = 0$

$P2R - Pr - Pr - QR = 0 \rightarrow Q = 2P\left(1-\frac{r}{R}\right)$

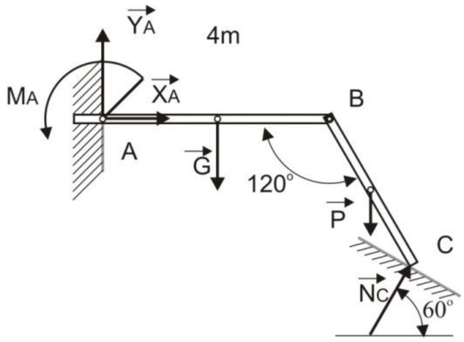
Primer 2.5 (L.Vujošević 27)

Homogena greda AB, dužine 4m i težine G=60daN, spojena je zglobno krajem B sa drugom homogenom gredom BC, dužine 3m i težine P=40 daN. Prva greda je horizontalna i krajem A je uklještena u zid. Druga greda se krajem C slobodno oslanja na glatku strmu ravan nagibnog ugla a=30°.



Odrediti reakcije uklještenja A i strme ravni u tački C, ako je ugao ABC =120°.

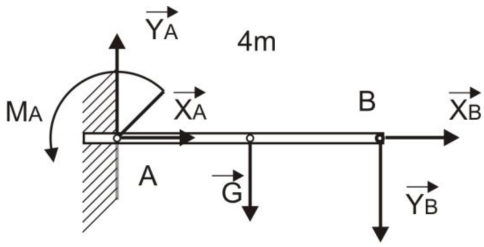
Označiti aktivne sile osloboditi se veza reakcijama.

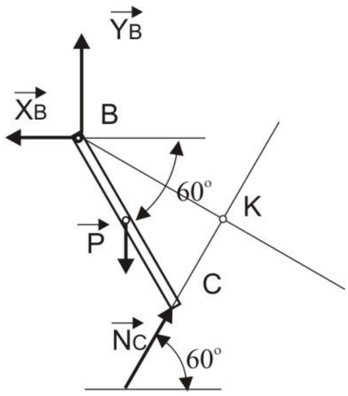


Nepoznate veličine: $\vec{M}_A, \vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{N}_C$

Uslovi ravnoteže:

$\sum M_A = 0 \quad \sum X_B = 0 \quad \sum Y_A = 0$





Sistem rastaviti u zglobu B

$\overline{AB} = L = 4m$

$\overline{BC} = L_1 = 3m$

$\overline{BK} = L_1 cos30°$

Jednačine za sistem:

$\sum X_i = X_A + N_C cos60° = 0 \rightarrow X_A = -N_C \frac{1}{2}$

$\sum Y_i = Y_A + N_C sin60° - G - P = 0 \rightarrow Y_A = G + P - N_C \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sum M_B = M_A - Y_A L + N_C L_1 cos30° + G\frac{L}{2} - P\frac{L_1}{2} cos60° = 0 \rightarrow M_A$

Iz ravnoteže dela BC koristi se samo momentna jednačina za tačku B

$\sum M_B = N_C L_1 cos30° - P\frac{L_1}{2} cos60° = 0$

$2N_C cos30° - Pcos60° = 0$

$2N_C \frac{\sqrt{3}}{2} - P\frac{1}{2} = 0 \rightarrow N_C = \frac{P\sqrt{3}}{6} = \frac{40\sqrt{3}}{6} = 11.54 daN$

$X_A = -N_C \frac{1}{2} = -\frac{P\sqrt{3}}{12} = 5.77 daN$

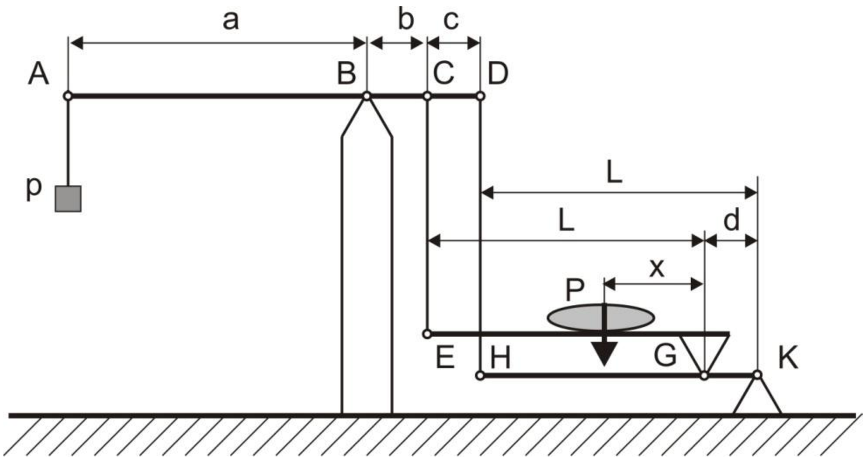
$Y_A = G + P - N_C \frac{\sqrt{3}}{2} = G + P - \frac{P}{4} = 60 + 40 - 10 = 90\ daN$

$M_A = Y_A L - N_C L_1 cos30° + G\frac{L}{2} + P\frac{L_1}{2} cos60°$

$M_A = 90 \cdot 4 - \frac{40\sqrt{3}}{6} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 60 \cdot 2 + 40 \cdot 1.5 \cdot \frac{1}{2} = 240\ daNm$

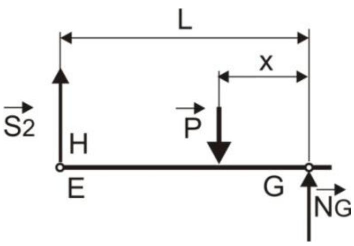
Primer 2.6 (M.1.74)

Na platformi vage QUINTENZ dejstvuje u tački F teret P. AB=a, BC=b, CD=k, JK=d, HK=L, EG=L. Odrediti:

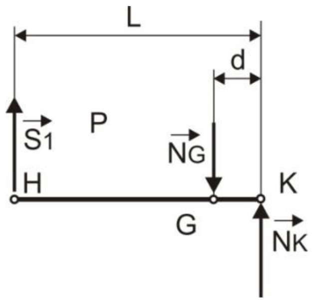


1. Odnos dužina a,b,c,di L pri kojima teret p održava ravnotežu P a koji ne zavisi od položaja na platformi
2. Težinu tega p.

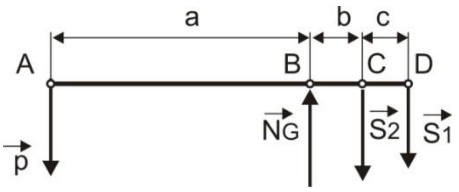
Prvo se posmatra platforma na kojoj je teret P



1. $\sum M_G = S_2 \cdot L - P \cdot x = 0 \rightarrow S_2 = P\frac{x}{L}$
2. $\sum M_H = N_G \cdot L - P \cdot (L - x) = 0 \rightarrow N_G = P\left(1 - \frac{x}{L}\right)$



3. $\sum M_K = S_1 \cdot L - N_G \cdot d = 0 \rightarrow S_1 = \frac{d}{L} N_G = P\frac{d}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)$



4. $\sum M_B = S_1(c + b) + S_2 b - p \cdot a = 0$

$P\frac{d}{L}\left(1 - \frac{x}{L}\right)(c + b) + P\frac{x}{L}\, b - p \cdot a = 0$

$P\left[\left(\frac{dc+db}{L}\right)\left(-\frac{x}{L}\right) + \frac{x}{L}\, b\right] - p \cdot a + P\left(\frac{d}{L}\right)(c + b) = 0$

$Px\frac{bL-dc-db}{L} + Pdb + Pdc - p \cdot aL = 0$

Da nema uticaja x član uz x mora da bude 0 $\quad Px\frac{bL-dc-db}{L} = 0 \quad$ znači da treba zadovoljiti odnos dimenzija $\quad \frac{d}{L}(c + b) = b$

Teg p koji drži u ravnoteži teret P jep $\quad p = P\frac{db+dc}{aL} = P\frac{1}{a}\frac{d}{L}(b + c) = P\frac{b}{a}$

$p = P\frac{1}{a}\left[\frac{d}{L}(b + c)\right] = P\frac{b}{a}$