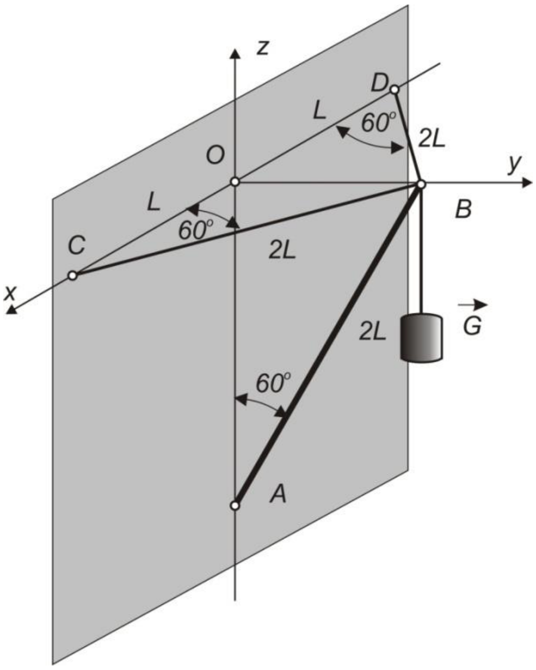
Primer 5.2

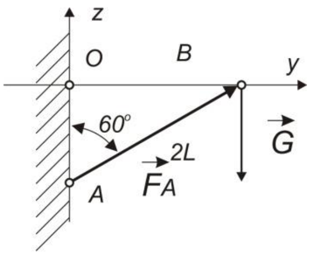
Štap AB dužine 2L vezan je u tački A za vertikalni zid na rastojanju OA=l od tačke O. Kraj štapa B pridržavaju dva horizontalna zategnuta užeta DC=BD jednakih dužina vezani u tačkama C i D za zid na jednakom rastojanju od tačke O. OC=OD=0.5 BC. U tački B okačen je teret G.



Odrediti silu u užadima i silu u štapu.

Kako se uočava sa slike sve četiri sile se seku u tački B, pa je system sučeljnih sila.

Potreban i dovoljan uslov ravnoteže je da je rezultanta sistema sila jednaka nuli, odnosno da su projekcije rezultante na ose Dekartovog pravouglog sistema jednake nuli.



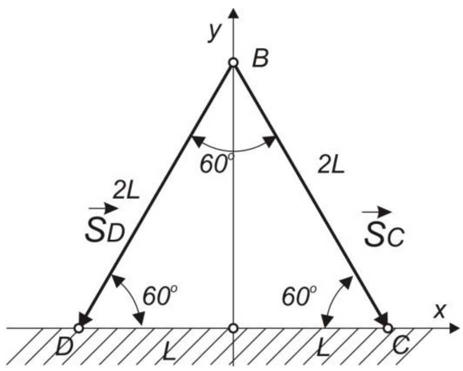
Zamenjuje se dejstvo elementa odgovarajućim silama, oslobađa se veza.

Težina G

$\vec{G} = (0,0,-G)$

Sila lakog štapa AB , sila u pravcu štapa AB, obeležena sa F_A.

$\overrightarrow{F_A} = (0, F_A \sin 60°, F_A \cos \alpha 60°)$ odnosno $\overrightarrow{F_A} = \left(0, F_A \frac{\sqrt{3}}{2}, F_A \frac{1}{2}\right)$



Sile u jednom i drugom užetu sile u pravcu užadi usmerene od tačke B ka tačkama C i D, obeležene sa S_C i S_D.

$\overrightarrow{S_C} = (S_C \cos \alpha 60°, -S_C \sin 60°, 0)$

odnosno $\overrightarrow{S_C} = \left(S_C \frac{1}{2}, -S_C \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

$\overrightarrow{S_D} = (-S_D \cos \alpha 60°, -S_D \sin 60°, 0)$

odnosno $\overrightarrow{S_D} = \left(-S_D \frac{1}{2}, -S_D \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$

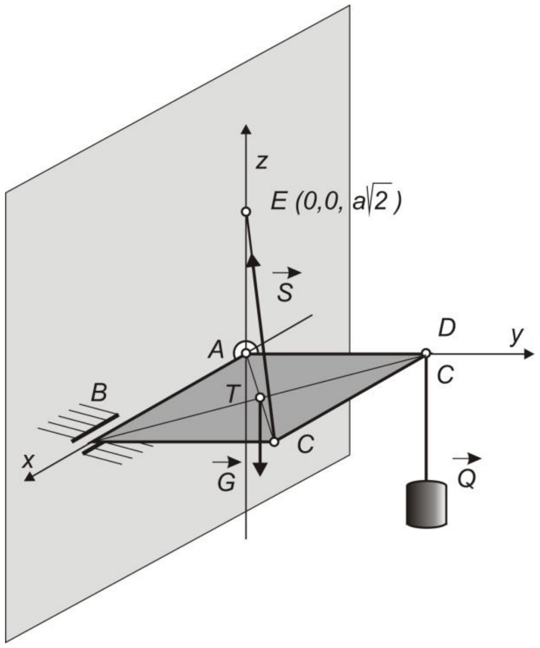
Uslovi ravnoteže: $\sum X_i = 0$; $\sum Y_i = 0$; $\sum Z_i = 0$

$\sum X_i = S_C \frac{1}{2} - S_D \frac{1}{2}$ odakle se dobija $S_C = S_D = S$

$\sum Y_i = F_A \frac{\sqrt{3}}{2} - S_C \frac{\sqrt{3}}{2} - S_D \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$ odakle se dobija $F_A = 2S_C = 2S$

$\sum Z_i = F_A \frac{1}{2} - G = 0$ odakle se dobija $F_A = 2G$ pa je $S_C = S_D = G$

Primer 5.3



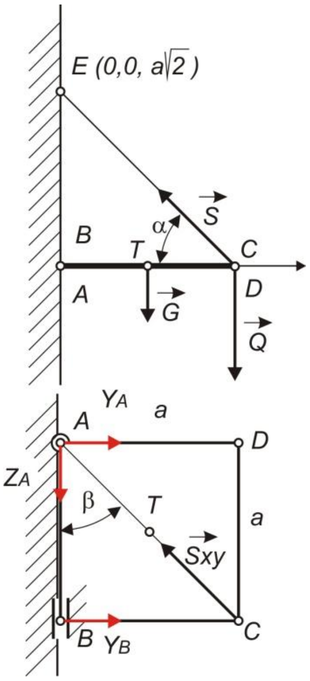
Homogena kvadratna ploča, težine G i stranice a, vezana je za postolje sfernim zglobom A i cilindričnim zglobom B, a u tački C pridržava se užetom CE. Odrediti sve reakcije veza ako su koordinate tačke E(0,0,$a\sqrt{2}$) i Q=2G.

Sistem predstavlja prostorni sistem sila, nepoznate su komponente otpora oslonaca 3+2 i intenzitet sile u užetu. Treba postaviti 6 jednačina uslova ravnoteže, i odrediti nepoznate.

$\vec{G} = (0,0,-G)$

$\vec{Q} = (0,0,-2G)$

$\overrightarrow{F_A} = (X_A;\ Y_A;\ Z_A)$
$\overrightarrow{F_B} = (0;\ Y_B;\ Z_B)$



$\overrightarrow{S_C} = (S\cos\alpha\cos\beta\,, S\cos\alpha\sin\beta\,, S\sin\alpha)$

Sa slike se vidi da je: $\overline{KA} = \sqrt{a^2+a^2} = a\sqrt{2}$

$\overline{KE} = \sqrt{\left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{2a^2+2a^2} = 2a$

$tg\alpha = \frac{a\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} = 1 \ \rightarrow \alpha = 45° \rightarrow sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$tg\beta = \frac{a}{a} = 1 \ \rightarrow \beta = 45° \rightarrow sin\beta = \frac{\sqrt{2}}{2};\quad cos\beta = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overrightarrow{S_C} = \left(-S\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, -S\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, S\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left(-S\frac{1}{2}, -S\frac{1}{2}, S\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

1. $\sum X_i = X_A - \frac{1}{2}S = 0 \rightarrow X_A = \frac{1}{2}S$
2. $\sum Y_i = Y_A + Y_B - \frac{1}{2}S = 0$
3. $\sum Z_i = Z_A + Z_B + \frac{\sqrt{2}}{2}S - G - 2G = 0$
4. $\sum M_x = S_z \cdot a - G\cdot\frac{a}{2} - 2G\cdot a = 0$
5. $\sum M_y = -S_z \cdot a + G\cdot\frac{a}{2} - Z_B \cdot a = 0$
6. $\sum M_z = Y_B \cdot a + S_x \cdot a - S_y \cdot a = 0$

Dobijaju se rešenja: iz 4 sledi $S = \frac{5\sqrt{2}}{2}\cdot G$ iz 6 sledi $Y_B = 0$ iz 5 $Z_B = 2G$

iz 1 sledi $X_A = \frac{5\sqrt{2}}{4}\cdot G$ oda iz 2 $Y_A = \frac{5\sqrt{2}}{4}\cdot G$ i iz 3 $Z_A = -\frac{3}{2}\cdot G$

Drugi način rešavanja zadataka je direktna primena vektorske algebre

Poznata opterećenja:

$$\vec{G} = (0,0,-G)$$

$$\vec{Q} = (0,0,-2G)$$

Nepoznate reakcije veza:

$$\overrightarrow{F_A} = (X_A;\ Y_A;\ Z_A)$$
$$\overrightarrow{F_B} = (0;\ Y_B;\ Z_B)$$

Sila u užetu ima pravac užeta koji se definiše jediničnim vektorima pravca užeta a dobija se kaoproizvosd intenziteta sile u užetu S i jediničnog vektora CE.

$$\vec{S} = S\frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|} = S \cdot \vec{s}_o$$

$$\overrightarrow{CE} = (x_E - x_c) \cdot \vec{\imath} + (y_E - y_c) \cdot \vec{\jmath} + (z_E - z_c) \cdot \vec{k} = -a \cdot \vec{\imath} - a \cdot \vec{\jmath} + a\sqrt{2} \cdot \vec{k}$$

$$|\overrightarrow{CE}| = \sqrt{a^2 + a^2 + \left(a\sqrt{2}\right)^2} = 2a$$

$$\vec{s}_o = \frac{\overrightarrow{CE}}{|\overrightarrow{CE}|} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{\imath} - \frac{1}{2} \cdot \vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \vec{k}$$

$$\vec{S} = S \cdot \vec{s}_o = -\frac{1}{2}S \cdot \vec{\imath} - \frac{1}{2}S \cdot \vec{\jmath} + \frac{\sqrt{2}}{2}S \cdot \vec{k}$$

Koordinate tačaka su A(0,0,0); B(a,0,0); C(a,a,0); D(0,a,0) T(0.5a;0.5a;0), E(0,0,1.41a)

Vektori položaja napadnih tačaka sila su:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{r_D} = (x_D - x_A) \cdot \vec{\imath} + (y_D - y_A) \cdot \vec{\jmath} + (z_D - z_A) \cdot \vec{k} = a \cdot \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_C} = (x_C - x_A) \cdot \vec{\imath} + (y_C - y_A) \cdot \vec{\jmath} + (z_C - z_A) \cdot \vec{k} = a \cdot \vec{\imath} + a \cdot \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{AT} = \overrightarrow{r_T} = (x_T - x_A) \cdot \vec{\imath} + (y_T - y_A) \cdot \vec{\jmath} + (z_T - z_A) \cdot \vec{k} = \frac{a}{2} \cdot \vec{\imath} + \frac{a}{2} \cdot \vec{\jmath}$$

Izrazi za momente od sila su:

$$\overrightarrow{M_A^{\vec{G}}} = \overrightarrow{r_T} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{a}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} = \frac{Ga}{2} \cdot \vec{\imath} + \frac{Ga}{2} \cdot \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{M_A^{\vec{Q}}} = \overrightarrow{r_D} \times \vec{Q} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -2G \end{vmatrix} = 2Ga \cdot \vec{\imath} - 2Ga \cdot \vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{M_A^{\vec{S}}} = \overrightarrow{r_C} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & a & 0 \\ -\frac{1}{2}S & -\frac{1}{2}S & \frac{\sqrt{2}}{2}S \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2}Sa \cdot \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}Sa \cdot \vec{j}$$

$$\overrightarrow{M_A^{\overrightarrow{F_B}}} = \overrightarrow{r_B} \times \overrightarrow{F_B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & Y_B & Z_B \end{vmatrix} = -Z_B a \cdot \vec{j} + Y_B a \cdot \vec{k}$$

Postaviti uslove ravnoteže, sabrati sve sile po osama, sve sile uz jedinični vektor ose x, y i z kao i sve momente po osma, sve momente koji su uz jedinične vektore osa:

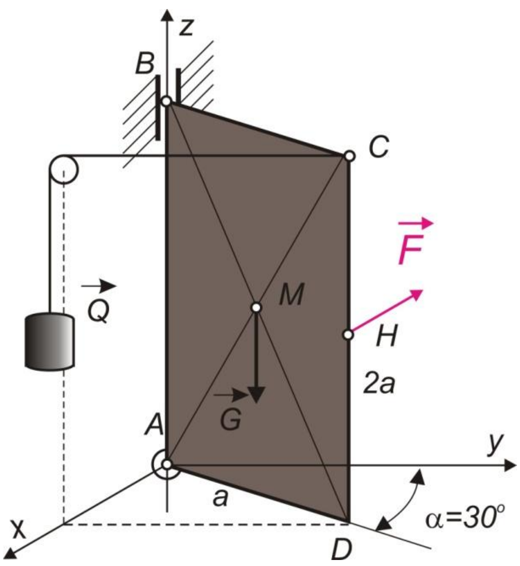
1. $\sum X_i = X_A - \frac{1}{2}S = 0 \rightarrow X_A = \frac{1}{2}S$
2. $\sum Y_i = Y_A + Y_B - \frac{1}{2}S = 0$
3. $\sum Z_i = Z_A + Z_B + \frac{\sqrt{2}}{2}S - G - 2G = 0$
4. $\sum M_x = S_z \cdot a - G \cdot \frac{a}{2} - 2G \cdot a = 0$
5. $\sum M_y = -S_z \cdot a + G \cdot \frac{a}{2} - Z_B \cdot a = 0$
6. $\sum M_z = Y_B \cdot a + S_x \cdot a - S_y \cdot a = 0$

Rešavanje sistema od šest jednačina sa šest nepoznatih je klasičnim matematičkim metodama.

Dobijaju se rešenja: iz 4 sledi $S = \frac{5\sqrt{2}}{2} \cdot G$ iz 6 sledi $Y_B = 0$ iz 5 $Z_B = 2G$

iz 1 sledi $X_A = \frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot G$ oda iz 2 $Y_A = \frac{5\sqrt{2}}{4} \cdot G$ i iz 3 $Z_A = -\frac{3}{2} \cdot G$

Primer 5.4

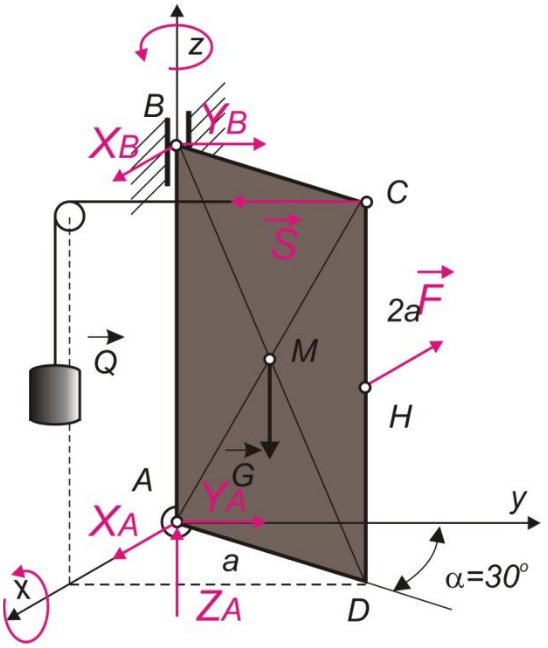


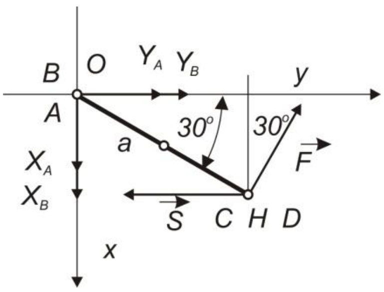
Vertikalno postavljena homogena vrata ABCD, težine G i stranica a i 2a, nalaze se u ravnotežnom položaju. U tački C vezano je uže i prebačeno preko kotura E, na čijem je kraju Q. Deo užeta CE je paralelan sa osom y. Vrata su u ravnoteži pod uglom $\alpha=30^o$ u odnosu na vertikalnu ravan Ayz.

Odrediti horizontalnu silu F koja deluje upravno na vrata u tački H, na sredini stranice CD, kao i reakcije veza. Uzeti Q=2G.

Poznata opterećenja:

$\vec{G} = (0,0,-G)$





Nepoznate reakcije veza:

$\overrightarrow{F_A} = (X_A;\ Y_A;\ Z_A)$
$\overrightarrow{F_B} = (0;\ Y_B;\ Z_B)$

Sila u užetu je horižontalna kao i aktivna sila F

$\vec{S} = (0,-S,0)$

$\vec{F} = (-Fcos30°, Fsin30°, 0) = \left(-F\frac{\sqrt{3}}{2}, F\frac{1}{2}, 0\right)$

Na osnovu slike i opterećenja direktno pisati uslove ravnoteže

1. $\sum X_i = X_A + X_B - \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0$
2. $\sum Y_i = Y_A + Y_B - S + \frac{1}{2}F = 0$
3. $\sum Z_i = Z_A - G = 0$
4. $\sum M_x = S \cdot 2a - Y_B \cdot 2a - G \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F\frac{1}{2} \cdot a = 0$
5. $\sum M_y = X_B \cdot 2a + G \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} - F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = 0$
6. $\sum M_z = F \cdot a - S \cdot a\frac{1}{2} = 0$

Rešavanjem se dobija:

Iz 3 $Z_A = G$

Iz 6 $S = 2G$

Iz 5 $X_B = \frac{2\sqrt{3}-1}{8} G = 0.31\ G$

Iz 4 $Y_B = \frac{14-\sqrt{3}}{8} G = 1.53\ G$

Iz 2 $Y_A = \frac{\sqrt{3}-2}{8} G = -0.033\ G$

Iz 1 $X_A = \frac{2\sqrt{3}+1}{8} G = 0.56\ G$

Drugi način rešavanja

Sa slike se uočavaju koordinate karakterističnih tačaka

$B(0,0,2a)$

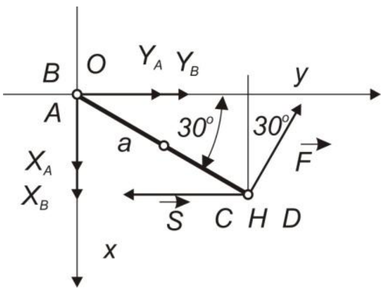
$C(a\ sin30°, a\ cos30°, 2a) = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 2a\right)$

$D(a\ sin30°, a\ cos30°, 0) = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$

$H(a\ sin30°, a\ cos30°, a) = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; a\right)$

$M\left(\frac{a}{2}\ sin30°, \frac{a}{2}\ cos30°, a\right) = \left(\frac{a}{4}; \frac{a\sqrt{3}}{4}; a\right)$

$E(a\ sin30°, 0, 2a) = \left(\frac{a}{2};\ 0; 2a\right)$



Nepoznate reakcije veza:

$\overrightarrow{F_A} = (X_A;\ Y_A;\ Z_A)$
$\overrightarrow{F_B} = (0;\ Y_B;\ Z_B)$

Sila u užetu je horižontalna kao i aktivna sila F

$\vec{S} = (0, -S, 0)$

$\vec{F} = (-Fcos30°, Fsin30°, 0) = \left(-F\frac{\sqrt{3}}{2}, F\frac{1}{2}, 0\right)$

Vektori položaja napadnih tačaka sila:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{r_M} = (x_M - x_A)\cdot\vec{\imath} + (y_M - y_A)\cdot\vec{\jmath} + (z_M - z_A)\cdot\vec{k} = \frac{a}{4}\cdot\vec{\imath} + \frac{a\sqrt{3}}{4}\cdot\vec{\jmath} + a\cdot\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{r_C} = (x_C - x_A)\cdot\vec{\imath} + (y_C - y_A)\cdot\vec{\jmath} + (z_C - z_A)\cdot\vec{k} = \frac{a}{2}\cdot\vec{\imath} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\vec{\jmath} + 2a\cdot\vec{k}$$

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{r_H} = (x_H - x_A)\cdot\vec{\imath} + (y_H - y_A)\cdot\vec{\jmath} + (z_H - z_A)\cdot\vec{k} = \frac{a}{2}\cdot\vec{\imath} + \frac{a\sqrt{3}}{2}\cdot\vec{\jmath} + a\cdot\vec{k}$$

Momenti za ose od sila su:

$$\overrightarrow{M_A^{\vec{G}}} = \overrightarrow{r_M}\times\vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{a}{4} & \frac{a\sqrt{3}}{4} & a \\ 0 & 0 & -G \end{vmatrix} = -\frac{Ga\sqrt{3}}{4}\cdot\vec{\imath} + \frac{Ga}{4}\cdot\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{M_A^{\vec{F}}} = \overrightarrow{r_H} \times \vec{G} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} & a \\ -\frac{\sqrt{3}}{2}F & \frac{1}{2}F & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}Fa \cdot \vec{\imath} - \frac{\sqrt{3}}{2}Fa \cdot \vec{\jmath} + Fa \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_A^{\vec{S}}} = \overrightarrow{r_C} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{a}{2} & \frac{a\sqrt{3}}{2} & 2a \\ 0 & -S & 0 \end{vmatrix} = 2aS \cdot \vec{\imath} - \frac{1}{2}aS \cdot \vec{k}$$

$$\overrightarrow{M_A^{\overrightarrow{F_B}}} = \overrightarrow{r_B} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2a \\ X_B & Y_B & 0 \end{vmatrix} = -2aY_B \cdot \vec{\imath} + 2aX_B \cdot \vec{\jmath}$$

Postaviti uslove ravnoteže, sabrati sve sile po osama, sve sile uz jedinični vektor ose x, y i z kao i sve momente po osma, sve momente koji su uz jedinične vektore osa:

1. $\sum X_i = X_A + X_B - \frac{\sqrt{3}}{2}F = 0$
2. $\sum Y_i = Y_A + Y_B - S + \frac{1}{2}F = 0$
3. $\sum Z_i = Z_A - G = 0$
4. $\sum M_x = S \cdot 2a - Y_B \cdot 2a - G \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - F\frac{1}{2} \cdot a = 0$
5. $\sum M_y = X_B \cdot 2a + G \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{2} - F \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot a = 0$
6. $\sum M_z = F \cdot a - S \cdot a\frac{1}{2} = 0$

Rešavanjem se dobija:

Iz 3 $\quad Z_A = G$

Iz 6 $\quad S = 2G$

Iz 5 $\quad X_B = \frac{2\sqrt{3}-1}{8}G = 0.31\,G$

Iz 4 $\quad Y_B = \frac{14-\sqrt{3}}{8}G = 1.53\,G$

Iz 2 $\quad Y_A = \frac{\sqrt{3}-2}{8}G = -0.033\,G$

Iz 1 $\quad X_A = \frac{2\sqrt{3}+1}{8}G = 0.56\,G$