Otpornost materijala

Geometrijske karakteristike
poprečnog preseka

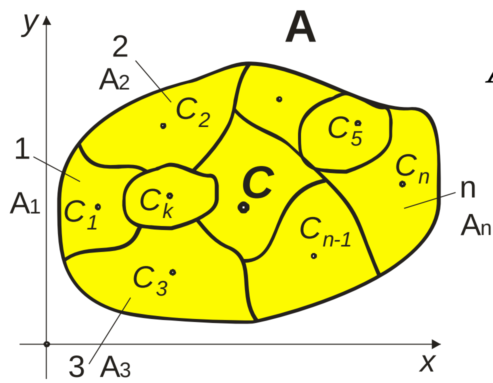
Otpornost materijala

Geometrijske karakteristike poprečnog preseka

- Površina poprečnog preseka
- Statički moment poprečnog preseka
- Momenti inercije poprečnog preseka

Otpornost materijala

Površina poprečnog preseka



$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \ldots\ A_n$$

$$C_1\{x_1;y_1\}\ \ C_1\{x_2;y_2\}\ \ C_1\{x_3;y_3\}\ \ \ldots\ \ C_n\{x_n;y_n\}$$

Otpornost materijala

Površina poprečnog preseka

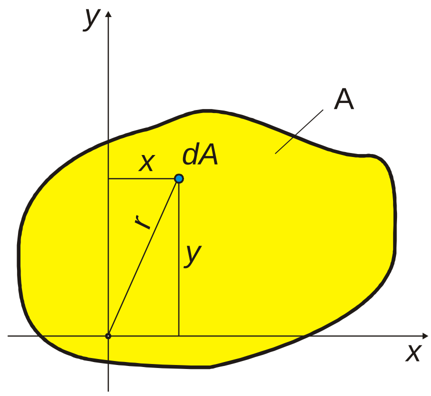
$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i=A_1+A_2+A_3+\ldots+A_n$$

$$\boxed{A=\int_A dA}$$

Dimenzija $\left[L^2\right]$ **Jedinica** $\left[m^2\right]$

Otpornost materijala

Statički moment površine za osu



$$S_x = \int_A y dA$$

$$S_y = \int_A x dA$$

Dimenzija $\left[L^3\right]$ **Jedinica** $\left[m^3\right]$

Otpornost materijala

Statički moment

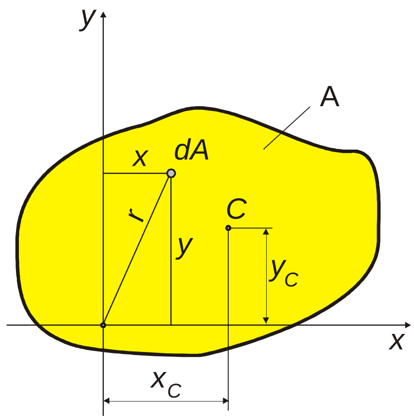
Za složenu površinu koja se sastoji od više prostih površina, statički moment za neku osu jednak je zbiru statičkih momenata pojedinih prostih površina u odnosu na istu osu

$$S_x = \int_A ydA = \int_1 ydA + \int_2 ydA + \int_3 ydA + ... + \int_n ydA = A_1 y_1 + A_2 y_2 + ... A_n y_n = \sum_{i=1}^{n} A_i y_i$$

$$S_y = \int_A xdA = \int_1 xdA + \int_2 xdA + \int_3 xdA + ... + \int_n xdA = A_1 x_1 + A_2 x_2 + ... + A_n x_n = \sum_{i=1}^{n} A_i x_i$$

Otpornost materijala

Koordinate težišta



$$x_C = \frac{\int_A x dA}{\int_A dA} = \frac{S_y}{A}$$

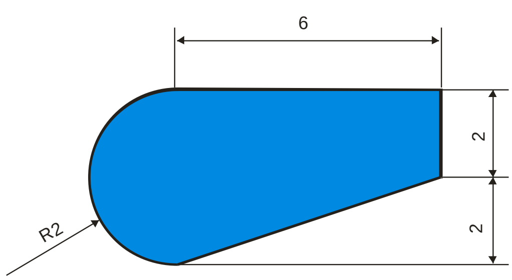
$$y_C = \frac{\int_A y dA}{\int_A dA} = \frac{S_x}{A}$$

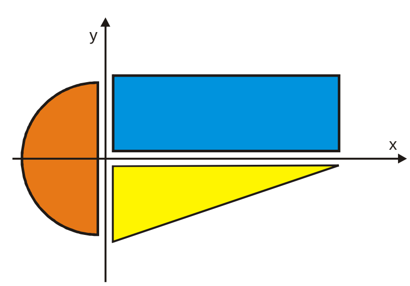
Po Varinjonovoj teoremi:

(moment rezultante jednak je zbiru momenata komponenata)

Otpornost materijala

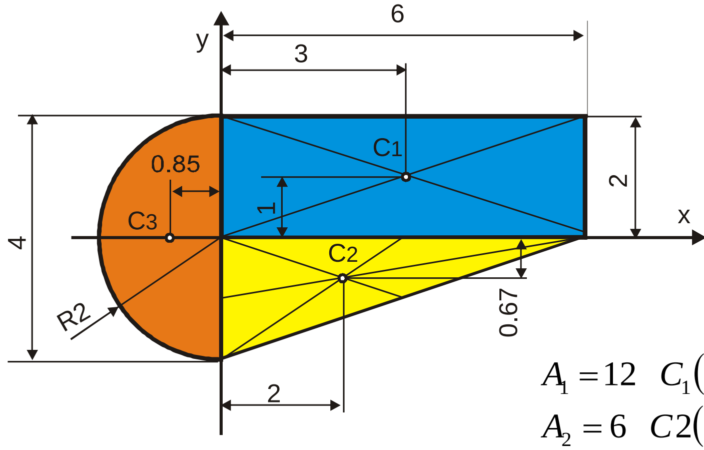
Primer :





Otpornost materijala

Brojni primer:



$$A_1 = 12 \quad C_1(3;1)$$
$$A_2 = 6 \quad C2(2;-0.67)$$
$$A_3 = 6{,}28 \quad C_1(-0.85;0)$$

Otpornost materijala

Brojni primer:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 12 + 6 + 6.28 = 24{,}28\ cm^2$$

$$S_{x1} = A_1 y_1 = 12 \cdot 1 = 12\, cm^3$$
$$S_{x2} = A_2 y_2 = 6 \cdot (-0.67) = -4.02\, cm^3$$
$$S_{x3} = A_3 y_3 = 6.28 \cdot 0 = 0\, cm^3$$

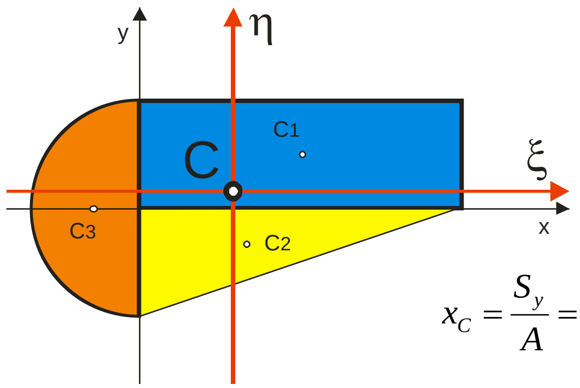
$$S_{y1} = A_1 x_1 = 12 \cdot 3 = 36\, cm^3$$
$$S_{y2} = A_2 x_2 = 6 \cdot 2 = 12\ cm^3$$
$$S_{y3} = A_3 x_3 = 6.28 \cdot (-0.85) = -5.34\, cm^3$$

$$S_x = S_{x1} + S_{x2} + S_{x3} = 12 - 4.02 + 0 = 7.98\, cm^3$$

$$S_y = S_{y1} + S_{y2} + S_{y3} = 36 + 12 - 5.34 = 42.66\, cm^3$$

Otpornost materijala

Brojni primer:



$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{42.66}{24.28} = 1.75\,cm$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{7.98}{24.28} = 0.32\,cm$$

Otpornost materijala

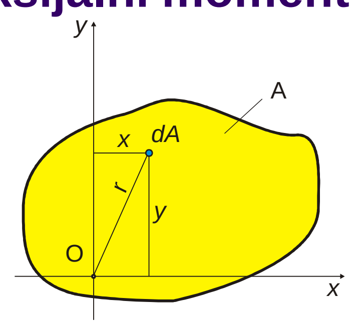
Karakteristike statičkih momenata poprečnog preseka

- Za osu simetrije statički moment površine jednak je nuli jer ova osa prolazi kroz težište.
- Ako površina ima dve ose simetrije ili više takvih osa, težište se nalazi u presečnoj tački tih osa
- Kososimetrične površine imaju težište u tački kose ose simetrije
- Ako osa prolazi kroz težište statički moment površine za tu osu jednak je nuli

Momenti inercije ravnih povšina

- Aksijalni moment inercije $I_x = \int_A y^2 dA \quad I_y = \int_A x^2 dA$
- Centrifugalni moment inercije $I_{xy} = \int_A xydA$
- Polarni moment inercije $I_o = \int_A r^2 dA$

Aksijalni moment inercije

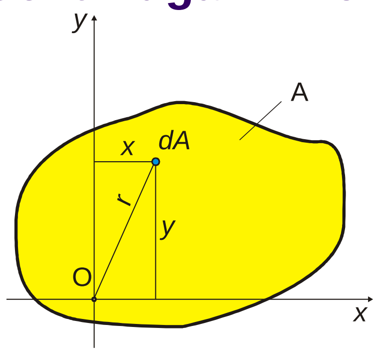


$$I_x = \int_A y^2 dA \qquad I_y = \int_A x^2 dA$$

Aksijalni moment inercije površine predstavlja zbir proizvoda svih elementarnih površina i kvadrata njihovih rastojanja od odgovarajuće ose u ravni te površine

Dimenzija $\left[L^4\right]$ **Jedinica** $\left[m^4\right]$

Centrifugalni moment inercije

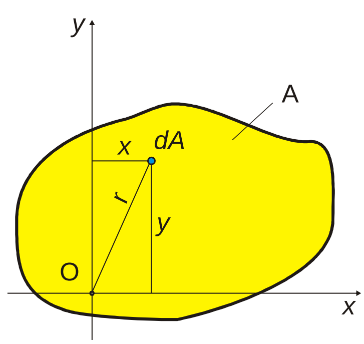


$$I_{xy} = \int_A x\, y\, dA$$

Centrifugalni moment površine predstavlja zbir proizvoda svih elementarnih površina i oba njihova rastojanja od osa u ravni te površine

Dimenzija $\left[L^4\right]$ **Jedinica** $\left[m^4\right]$

Polarni moment inercije



$$I_O = \int_A r^2\, dA$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$I_O = \int_A \left(x^2 + y^2\right) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_x + I_y$$

Polarni moment inercije u odnosu na pol O u ravni te površine predstavlja proizvod svih elementarnih površina i kvadrata njihovih rastojanja od tog pola

Dimenzija $\left[L^4\right]$ **Jedinica** $\left[m^4\right]$

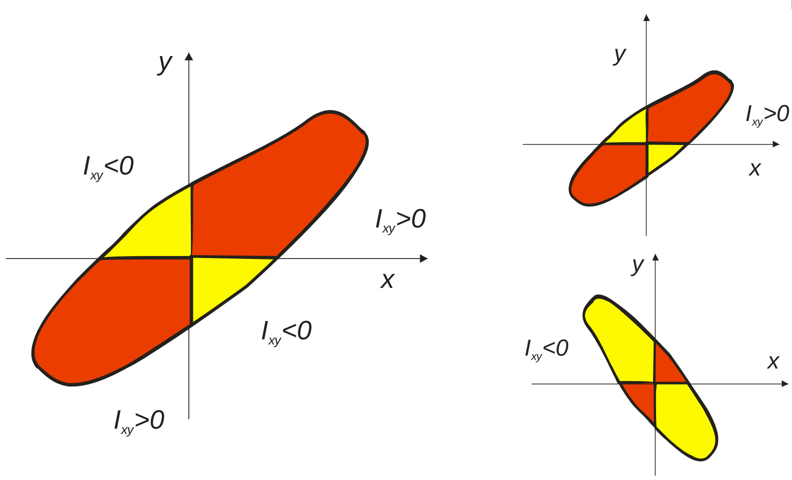
Otpornost materijala

Karakteristike momenata inercije

- Aksijalni i polarni moment inercije su uvek pozitivni
- Centrifugalni moment inercije može biti veći, manji ili jednak nuli
- Svaka površina ima bar jedan par osa za koje je centrifugalni moment inercije jednak nuli

Otpornost materijala

Znak polarnog momenta inercije



Otpornost materijala

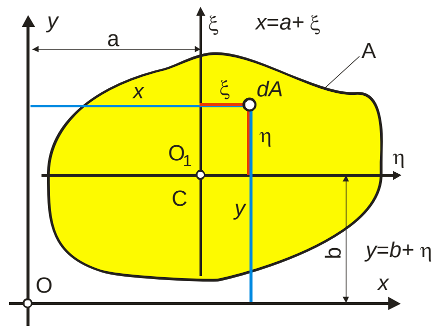
Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

- Moment inercije za ose težišne ξOη

$$I_\xi = \int_A \eta^2 dA$$

$$I_\eta = \int_A \xi^2 dA$$

$$I_{\xi\eta} = \int_A \xi\eta dA$$

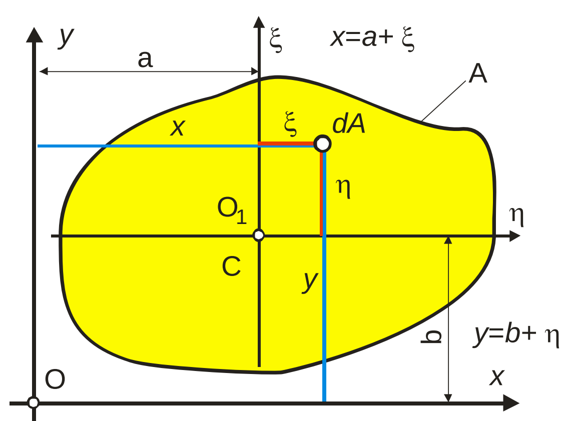


Ako osa prolazi kroz težište statički moment površine za tu osu jednak je nuli

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

U izrazima za momente inercije za X i Y osu vrednosti koordinata x i y zamenjujemo vrednostima, prema slici



$$x = a + \xi \quad y = b + \eta$$

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

$$y = b + \eta$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (b+\eta)^2 dA$$

$$I_x = \int_A \eta^2 dA + 2b \int_A \eta dA + b^2 \int_A dA$$

$$I_x = I_\xi + 2b\,S_\xi + b^2\ A$$

Ako osa prolazi kroz težište statički moment površine za tu osu jednak je nuli, a b je udaljenost x ose od paralelne težišne ose ζ

$$I_x = I_\xi + b^2\ A$$

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

$$x = a + \xi$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = \int_A (a+\xi)^2 dA$$

$$I_y = \int_A \xi^2 dA + 2a \int_A \xi dA + a^2 \int_A dA = I_\eta + 2a\,S_\eta + a^2\ A$$

Ako osa prolazi kroz težište statički moment površine za tu osu jednak je nuli, a b je udaljenost x ose od paralelne težišne ose ζ

$$I_y = I_\eta + a^2\ A$$

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

$$x = a + \xi \quad y = b + \eta$$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_A (a+\xi)(b+\eta) dA$$

$$I_{xy} = \int_A \xi\eta dA + a\int_A \eta dA + b\int_A \xi dA + ab\int_A dA$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + aS_\xi + bS_\eta + abA$$

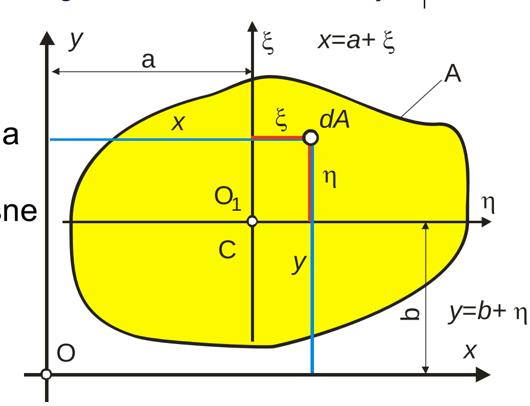
Ako osa prolazi kroz težište statički moment površine za tu osu jednak je nuli, a b je udaljenost x ose od paralelne težišne ose ζ, dok je a udaljenost yose od paralelne težišne ose η,

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + abA$$

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

- Kada se koordinatni početak sistema $\xi O_1 \eta$ poklapa sa težištem tada su ose ξ i η težišne ose
- Statički moment za težišne ose jednak je nuli, a koordinate



$$y_c = b; \quad x_c = a$$

$$S_\xi = S_\eta = 0$$

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

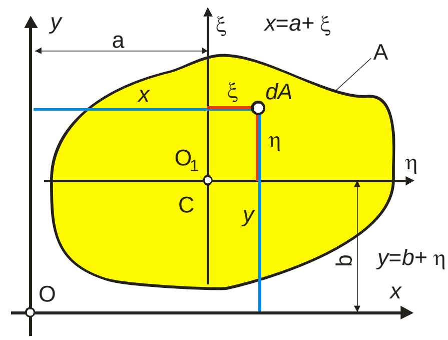
- Momenti I_{ξ}, I_{η} i $I_{\xi\eta}$

  sopstveni momenti inercije

  Proizvod površine preseka i udaljenosti od ose – osa naziva se

  položajni moment inercije

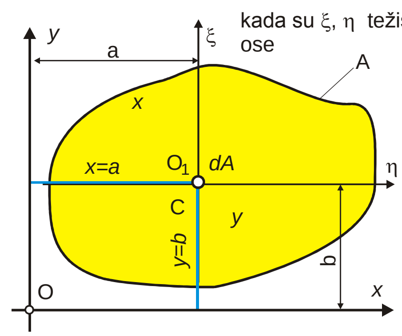
  b^2A, a^2A, abA



Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

- Momenti inercije za težišne ose ξOη nazivaju se sopstveni momenti inercije
- Momenti inercije za vantežišne ose jednaki su zbiru sopstvenih momenata inercije i položajnih momenata inercije



Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

$x=a \qquad y=b$

Za težišne ose ξ, η za paralelno pomeren koordinatni sistem izrazi za momente dobijaju oblik

$$I_x = I_\xi + b^2\ A$$

$$I_y = I_\eta + a^2\ A$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + abA$$

Moment inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem jednak je zbiru sopstvenog momenta inercije(uvek za težišne ose) i položajnog momenta inercije

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

- Moment inercije za vantežišne paralelne ose jednak je zbiru sopstvenih momenata inercije (težišnih) i položajnih momenata inercije

$$I_x = I_\xi + y_C^2 A$$

$$I_y = I_\eta + x_C^2 A$$

$$I_{xy} = I_{\xi\eta} + x_C y_C A$$

Napomena: rastojanja x_C i y_C uzimati sa svojim znakom

Otpornost materijala

Momenti inercije za paralelno pomeren koordinatni sistem (Štajnerova teorema)

- Moment inercije za paralelne težišne ose jednak je razlici momenata inercije za vantežišne paralelne ose i položajnih momenata inercije

$$I_\xi = I_x - y_C^2 A$$

$$I_\eta = I_y - x_C^2 A$$

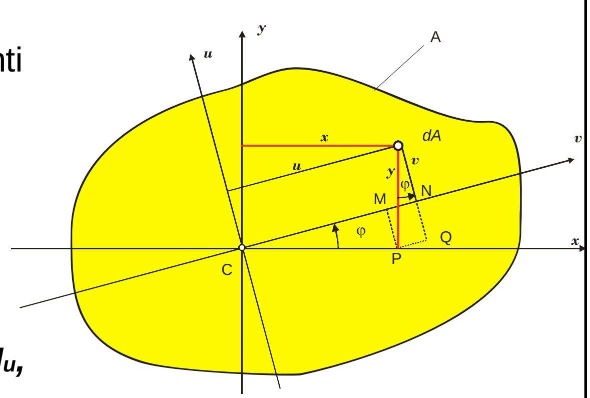
$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - x_C y_C A$$

Napomena: rastojanja x_C i y_C uzimati sa svojim znakom

Otpornost materijala

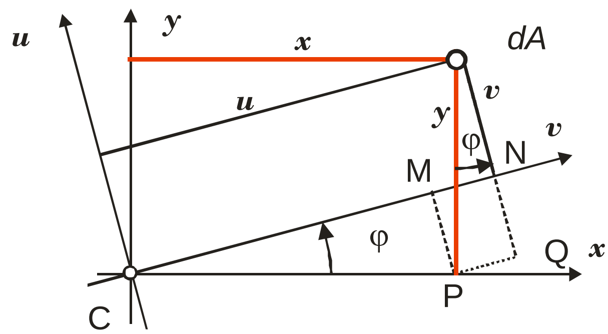
Momenti inercije za zaokrenuti koordinatni sistem (za težišne ose)

- Poznati su momenti inercije za težišne ose ***xCy I**$_x$**, I**$_y$**, I**$_{xy}$*
- Za neki zaokrenuti za ugao φ koordinatni sistem ***uCv*** treba odrediti momente inercije ***I**$_u$**, I**$_v$**, I**$_{uv}$*



Otpornost materijala

Momenti inercije za zaokrenuti koordinatni sistem (za težišne ose)



$$u = \overline{MN} + \overline{CM} = \overline{PQ} + \overline{CM} = y\sin\varphi + x\cos\varphi$$

$$u = \overline{SQ} - \overline{NQ} = \overline{SQ} - \overline{MP} = y\cos\varphi - x\sin\varphi$$

Otpornost materijala

Momenti inercije za zaokrenuti koordinatni sistem (za težišne ose)

Koristeći transformaciju koordinata dobijaju se:

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (y\cos\varphi - x\sin\varphi)^2 dA = \cos^2\varphi \int_A y^2 dA + \sin^2\varphi \int_A x^2 dA - 2\sin\varphi\cos\varphi \int_A xydA$$

$$I_u = I_x \cos^2\varphi + I_y \sin^2\varphi - I_{xy} 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$I_v = \int_A u^2 dA = \int_A (y\sin\varphi + x\cos\varphi)^2 dA = \sin^2\varphi \int_A y^2 dA + \cos^2\varphi \int_A x^2 dA + 2\sin\varphi\cos\varphi \int_A xydA$$

$$I_v = I_x \sin^2\varphi + I_y \cos^2\varphi + I_{xy} 2\sin\varphi\cos\varphi$$

$$I_{uv} = \int_A uvdA = \sin\varphi\cos\varphi\left(\int_A y^2 dA - \int_A x^2 dA\right) + \left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)xydA$$

$$I_{uv} = \left(I_x - I_y\right)\sin\varphi\cos\varphi + I_{xy}\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$$

Otpornost materijala

Momenti inercije za za okrenuti koordinatni sistem (za težišne ose)

Kako je:

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1+\cos 2\varphi), \qquad \sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1-\cos 2\varphi),$$

$$2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi \qquad \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \cos 2\varphi$$

Izrazi za izračunavanje težišnih momenata inercije za zaokrenute ose sada su

$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi$$

$$I_v = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi + I_{xy}\sin 2\varphi$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x + I_y)\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi$$

Ako su poznati momenti inercije za jedan par težišnih osa bez integraljenja mogu se izračunati momenti inercije za zaokrenute težišne ose

Otpornost materijala

Glavni momenti inercije i glavne ose inercije

Kako se drugi izraz za moment može dobiti iz prvog zamenom φ sa $\varphi+90^0$ analiziraju se drugi i treći izraz

$$I_u = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}(I_x - I_y)\cos 2\varphi - I_{xy}\sin 2\varphi$$

$$I_{uv} = \frac{1}{2}(I_x + I_y)\sin 2\varphi + I_{xy}\cos 2\varphi$$

Navedeni izrazi su neprekidne funkcije ugla φ pa se mogu odrediti ekstremne vrednosti:

$$\frac{dI_u}{d\varphi} = -(I_x + I_y)\sin 2\varphi + -2I_{xy}\cos 2\varphi = 0$$

argument φ koji zadovoljava ovu jednačinu obeležimo sa a

$$-(I_x + I_y)\sin 2\alpha + -2I_{xy}\cos 2\alpha = 0 \;|: \cos 2\alpha$$

$$\boxed{tg\,2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}}$$

Otpornost materijala

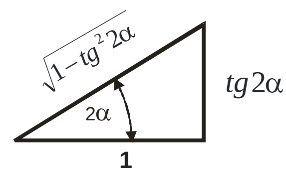
Glavni momenti inercije i glavne ose inercije

Ugao α određuje položaj glavnih težišnih osa

$$tg\,2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{I_x - I_y}{\pm\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}}$$

$$\sin 2\alpha = \frac{tg\,2\alpha}{\pm\sqrt{1+tg^2 2\alpha}} = \frac{-2I_{xy}}{\pm\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}}$$



$$I_{\max} = I_1 = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{\min} = I_2 = \frac{1}{2}\left(I_x + I_y\right) - \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_x - I_y\right)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$\left(I_{uv}\right)_{\varphi=\alpha} = I_{12} = 0$$

Otpornost materijala

Glavni momenti inercije i glavne ose inercije

- Za težišne ose za koje aksijalni momenti inercije imaju ekstremne vrednosti, centrifugalni moment inercije je jednak nuli.
- I obrnuto ako je za dve upravne težišne ose centrifugalni moment inercije jednak nuli, onda aksijalni momenti za te ose imaju ekstreme

Otpornost materijala

Elipsa inercije

Za površinu A poznate su ***glavne težišne ose (1) i (2)*** i glavni težišni momenti inercije ***I_1 i I_2***. Za proizvoljnu težišnu osu **u** pod uglom φ dobija se

$$I_u = I_1 \cos^2\varphi - I_2 \sin^2\varphi$$

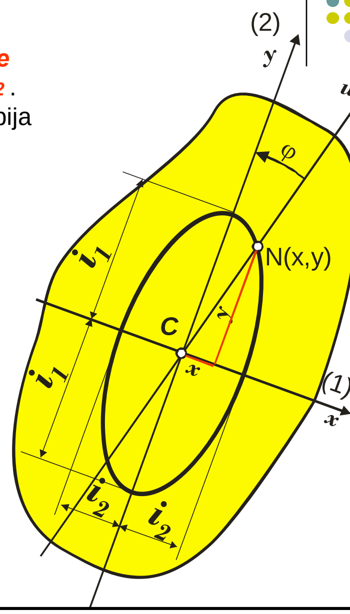
Deljenjem leve i desne strane sa površinom A dobija se

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}},\quad i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}}$$

Poluprečnici inercije za glavne ose

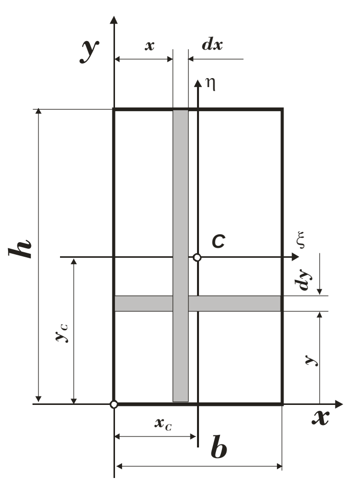
$$i_u = \sqrt{\frac{I_u}{A}}$$ Poluprečnik inercije za osu ***u***

$$i_u = i_1 \cos^2\varphi - i_2 \sin^2\varphi$$



Otpornost materijala

Momenti inercije pravougaonika



$$A = bh,\ x_C = \tfrac{b}{2},\ y_C = \tfrac{h}{2}$$

$$I_x = \int_A y^2 dA = b\int_0^h y^2 dy = \frac{bh^3}{3},\quad dA = bdy$$

$$I_y = \int_A x^2 dA = h\int_0^b x^2 dx = \frac{hb^3}{3},\quad dA = hdx$$

$$I_{xy} = \int_A xydA = \int_0^b \tfrac{b}{2}\, ydA = \frac{b^2}{2}\int_0^h ydy = \frac{h^2b^2}{4},\quad dA = bdy$$

Za težišne ose x i η

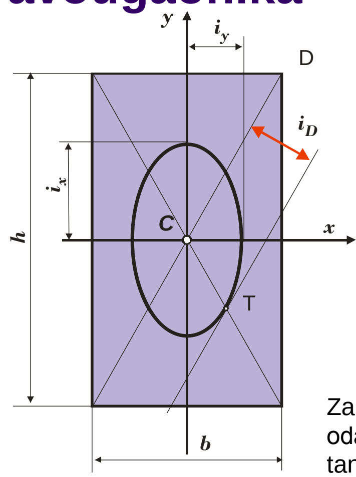
$$I_\xi = I_x - y_C^2 A = \frac{bh^3}{3} - \frac{h^2}{4}bh = \frac{bh^3}{12}$$

$$I_\eta = I_y - x_C^2 A = \frac{hb^3}{3} - \frac{b^2}{4}bh = \frac{hb^3}{12}$$

$$I_{\xi\eta} = I_{xy} - x_C y_C A = \frac{h^2b^3}{4} - \frac{b}{2}\frac{h}{2}bh = 0$$

Otpornost materijala

Momenti inercije i elipsa inercije pravougaonika



Za težišne ose obeležene sa ***x*** i ***y*** momenti inercije iznose:

$$I_x = \frac{bh^3}{12},\ I_y = \frac{b^3h}{12},\ I_{xy} = 0$$

Poluprečnici inercije su

$$i_x = i_1 = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{bh^3}{12}}{bh}} = \sqrt{\frac{h^2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}h = 0{,}29h$$

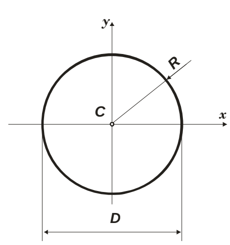
$$i_y = i_2 = \sqrt{\frac{I_y}{A}} = \sqrt{\frac{\frac{b^3h}{12}}{bh}} = \sqrt{\frac{b^2}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{6}b = 0{,}29b$$

Za proizvoljnu osu tangenta paralelna sa odabranom osom, i rastojanje od C do tačke dodira tangente T je i_D.

$$I_D = A \cdot i_D^2$$

Otpornost materijala

Podaci iz tablica za krug



$$A = \frac{D^2\pi}{4} = r^2\pi$$

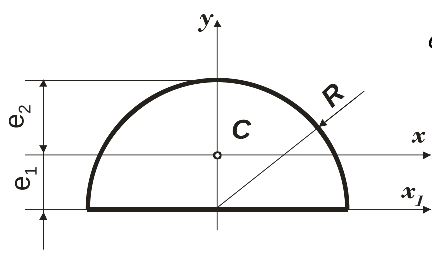
$$I_x = I_y = \frac{D^4\pi}{64} = \frac{r^4\pi}{4} \approx 0{,}0491D^4 = 0{,}7854r^4$$

$$I_{xy} = 0$$

$$i_x = i_y = \frac{D}{4} = \frac{r}{2}$$

Otpornost materijala

Podaci iz tablica za polovinu kruga



$$A = \frac{D^2\pi}{8} = \frac{r^2\pi}{2}$$

$$e_1 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0.2122D; \quad e_2 = r - e_1 \approx 0.2878D$$

$$I_x = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \cdot r^4 \approx 0.1098r^4 \approx 0.0069D^4$$

$$I_y = \frac{r^4\pi}{8} = \frac{D^4\pi}{128} \approx 0.392r^4 \approx 0.025D^4$$

$$I_{x1} = \frac{r^4\pi}{8} = \frac{D^4\pi}{128} \approx 0.392r^4 \approx 0.025D^4$$

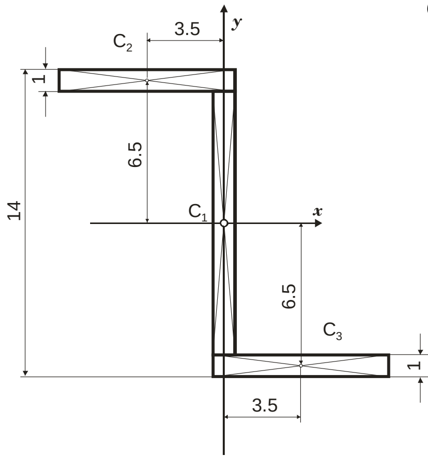
Otpornost materijala

Postupak pri određivanju momenata inercije složene površine

1. Izabrati koordinatni sistem Oxy i odrediti položaj težišta
2. Odrediti momente inercije za težišne ose svake površine, pa primenom Štajnerove teoreme odrediti momente inercije za težišne ose složene površine
3. Odrediti ugao glavnih centralnih osa inercije
4. Odrediti glavne centralne momente inercije
5. Odrediti poluprečnike elipse inercije i nacrtati elipsu inercije

Otpornost materijala

Primer izračunavanja momenata za složenu površinu



Odabrati ose x i y i odrediti težište

$$A_1 = 12 \cdot 1 = 12; \quad C_1(0;0),$$
$$A_2 = 8 \cdot 1 = 8; \quad C_2(-3.5;6.5),$$
$$A_3 = 8 \cdot 1 = 8; \quad C_3(3.5;-6.5)$$

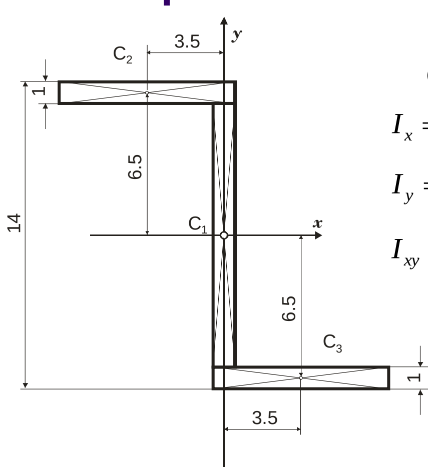
$$S_{x1} = 0cm^3, \; S_{y1} = 0cm^3,$$
$$S_{x2} = -28cm^3, \; S_{y2} = 52cm^3$$
$$S_{x3} = 28cm^3, \; S_{y3} = -52cm^3$$

$$x_C = \frac{S_{x1} + S_{x2} + S_{x3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0 - 28 + 28}{12 + 8 + 8} = 0$$

$$y_C = \frac{S_{y1} + S_{y2} + S_{y3}}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{0 + 52 - 52}{12 + 8 + 8} = 0$$

Otpornost materijala

Primer izračunavanja momenata za složenu površinu



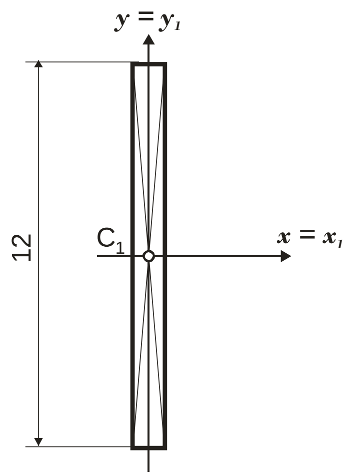
Odrediti momente inercije za ose x i y

$$I_x = I_{x1} + I_{x2} + y_{C2}^2 A_2 + I_{x3} + y_{C3}^2 A_3$$
$$I_y = I_{y1} + I_{y2} + x_{C2}^2 A_2 + I_{y3} + x_{C3}^2 A_3$$
$$I_{xy} = I_{xy1} + I_{xy2} + x_{C2} y_{C2} A_2 + I_{xy3} + x_{C3} y_{C3} A_3$$

Otpornost materijala

Primer izračunavanja momenata za složenu površinu

Odrediti momente inercije za ose x i y



$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{1 \cdot 12^3}{12} = 144 cm^4$$

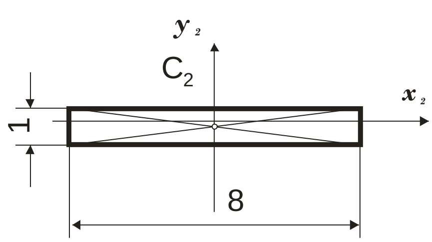
$$I_{y1} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{1^3 \cdot 12}{12} = 1 cm^4$$

$$I_{x1y1} = 0\, cm^4$$

Otpornost materijala

Primer izračunavanja momenata za složenu površinu

Odrediti momente inercije za ose x i y



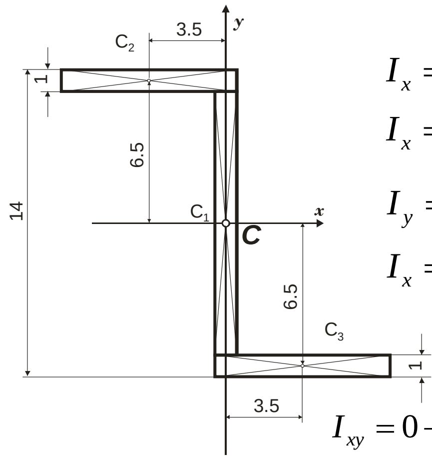
$$I_{x2} = I_{x3} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 1^3}{12} = 0.66\, cm^4$$

$$I_{y2} = I_{y3} = \frac{b^3 h}{12} = \frac{8^3 \cdot 1}{12} = 42.66\ cm^4$$

$$I_{x2y2} = I_{x3y3} = 0\ cm^4$$

Otpornost materijala

Primer izračunavanja momenata za složenu površinu



Odrediti momente inercije za ose x i y

$$I_x = 144 + 0.66 + 6.5^2 8 + 0.66 + 6.5^2 8$$

$$I_x = 822\, cm^4$$

$$I_y = 1 + 42.66 + 3.5^2 8 + 42.66 + 3.5^2 8$$

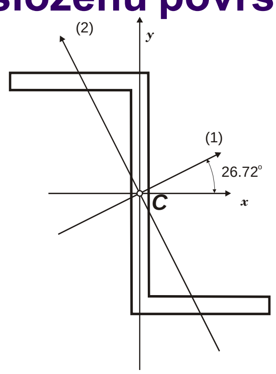
$$I_x = 282\, cm^4$$

$$I_{xy} = 0 + 0 + (-3.5)\cdot 6.5 \cdot 8 + 0 + 3.5 \cdot (-6.5) \cdot 8$$

$$I_{xy} = -364\, cm^4$$

Otpornost materijala

Primer izračunavanja momenata za složenu površinu



$$I_{max} = I_1 = 1006\, cm^4$$

$$I_{min} = I_2 = 99\, cm^4$$

$$(I_{uv})_{\varphi=\alpha} = I_{12} = 0$$

Odrediti ugao glavnih osa

$$tg\, 2\alpha = \frac{-2I_{xy}}{I_x - I_y} = \frac{-2(-364)}{821.33 - 282} = 1.3481$$

$$2\alpha = arctg\, 1.3481 = 53.433^\circ \qquad \alpha = 26.72^\circ$$

$$I_{max} = I_1 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) + \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{max} = I_1 = \frac{1}{2}(822 + 282) + \frac{1}{2}\sqrt{(822 - 282)^2 + 4 \cdot 364^2}$$

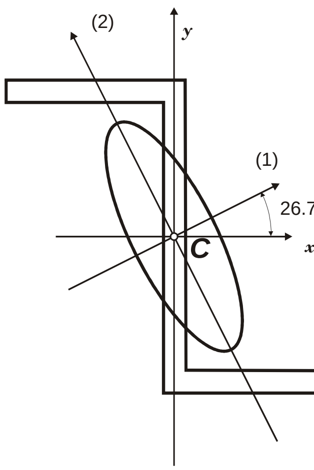
$$I_{min} = I_2 = \frac{1}{2}(I_x + I_y) - \frac{1}{2}\sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}$$

$$I_{max} = I_1 = \frac{1}{2}(822 + 282) - \frac{1}{2}\sqrt{(822 - 282)^2 + 4 \cdot 364^2}$$

$$(I_{uv})_{\varphi=\alpha} = I_{12} = 0$$

Otpornost materijala

Primer izračunavanja momenata za složenu površinu



Poluprečnici inercije

$$i_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A}} = \sqrt{\frac{1006}{28}} = 5.66\,cm$$

$$i_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A}} = \sqrt{\frac{99}{28}} = 1.88\,cm$$

Otpornost materijala

Postupak pri određivanju momenata inercije složene površine

1. Podeliti složenu površinu na određen broj manjih površina za koje je lako odrediti:
   - Težište površine
   - Statičke momente inercije površina za težišne ose
   - Sopstvene momente inercije površine za težišne ose
   - Aksijalne momente inercije površine za težišne ose
   - Centrifugalne momente inercije površine za težišne ose
   - Polarne momente inercije površine za težišne ose

Postupak pri određivanju momenata inercije složene površine

2. Izabrati koordinatni sistem Oxy i odrediti položaj težišta
3. Odrediti momente inercija za težišne ose svake površine pa primenom Štajnerove teoreme odrediti momente inercije za težišne ose složene površine
4. Odrediti ugao glavnih centralnih osa inercije
5. Odrediti glavne centralne momente inercije
6. Odrediti poluprečnike elipse inercije i nacrtati elipsu inercije

Napomene pri određivanju momenata inercije složene površine

Treba koristiti simetriju – težište složene površine je uvek na osi simetrije

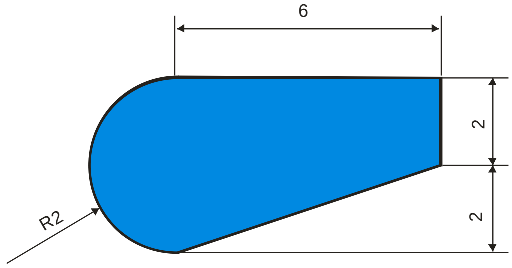
Osa simetrije je ujedno i jedna glavna osa inercije, a druga glavna osa prolazi kroz težište i upravna je na prvu

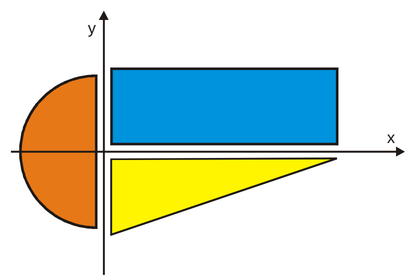
Ako površina ima više osa simetrije težište je u njihovom preseku a one su ujedno i glavne ose inercije

Za **glavne ose** uvek je **centrifugalni moment inercije jednak nuli**

Otpornost materijala

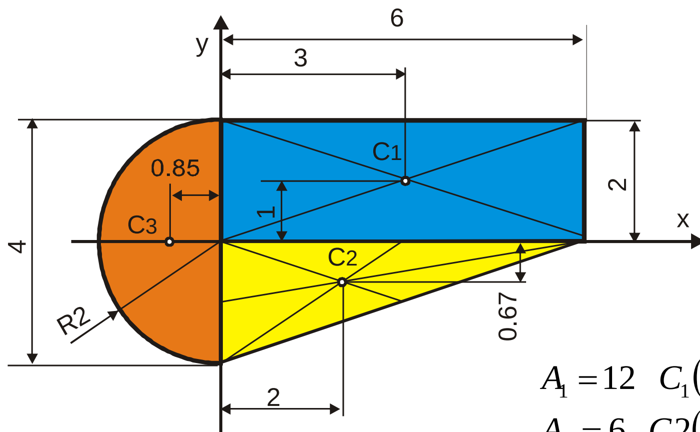
Primer :





Otpornost materijala

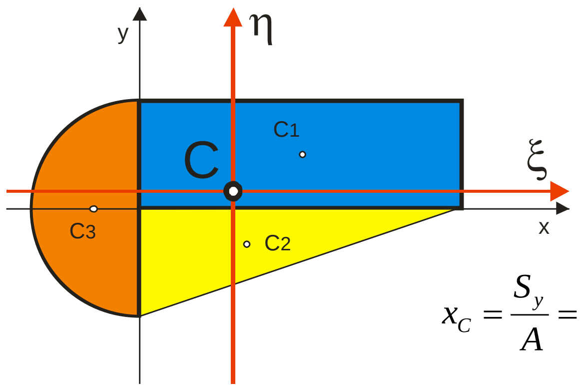
Brojni primer:



$$A_1 = 12 \quad C_1(3;1)$$
$$A_2 = 6 \quad C2(2;-0.67)$$
$$A_3 = 6{,}28 \quad C_1(-0.85;0)$$

Otpornost materijala

Brojni primer:

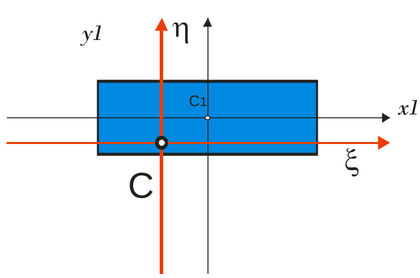


$$x_C = \frac{S_y}{A} = \frac{42.66}{24.28} = 1.75\,cm$$

$$y_C = \frac{S_x}{A} = \frac{7.98}{24.28} = 0.32\,cm$$

Otpornost materijala

Brojni primer:



$$A_1 = 12\,cm^2 \quad C_1(1.24;0.67)$$

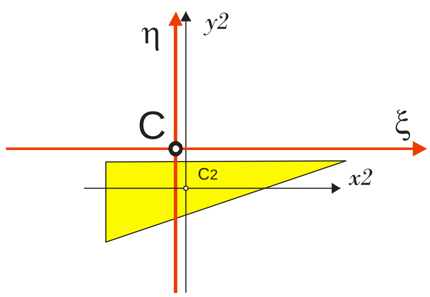
$$I_{x1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6\cdot 2^3}{12} = 4\,cm^4$$

$$I_{y1} = \frac{b^3h}{12} = \frac{6^3\cdot 2}{12} = 36\,cm^4$$

$$I_{x1y1} = 0$$

Otpornost materijala

Brojni primer:



$$A_2 = 6\,cm^2 \quad C_1(0.24;.-1)$$

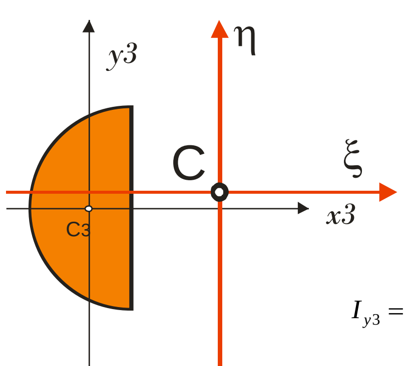
$$I_{x2} = \frac{bh^3}{36} = \frac{6 \cdot 2^3}{36} = 1.33\,cm^4$$

$$I_{y2} = \frac{b^3 h}{36} = \frac{6^3 \cdot 2}{36} = 12\,cm^4$$

$$I_{x2y2} = -\frac{b^2 h^2}{72} = -\frac{6^2 \cdot 2^2}{72} = 2\ cm^4$$

Otpornost materijala

Brojni primer:



$$A_1 = 6.28\,cm^2 \quad C_1(-2.61;0)$$

$$I_{x3} = \frac{r^4 \pi}{8} = \frac{2^4 \pi}{8} = 6.28\,cm^4$$

$$I_{y3} = \frac{r^4}{72\pi}\left(9\pi^2 - 64\right) = \frac{2^4}{72\pi}\left(9\pi^2 - 64\right) = 1.76\,cm^4$$

$$I_{x3y3} = 0$$

Otpornost materijala

Brojni primer:

$$I_\xi = I_{x1} + \eta_1^2 A_1 + I_{x2} + \eta_2^2 A_2 + I_{x3} + \eta_3^2 A_3$$

$$I_\xi = 4 + 5.38 + 1.33 + 6 + 6.28 = 23\ cm^4$$

$$I_\eta = I_{y1} + \xi_1^2 A_1 + I_{y2} + \xi_2^2 A_2 + I_{y3} + \eta_3^2 A_3$$

$$I_\eta = 36 + 18.45 + 12 + 0.34 + 42.78 + 1.75 = 111.3\ cm^4$$

$$I_{\xi\eta} = I_{x1y1} + \xi_1\eta_1 A_1 + I_{x2y2} + \xi_2\eta_2 A_2 + I_{x3y3} + \xi_3\eta_3 A_2$$

$$I_{\xi\eta} = 0 + 1.24 \cdot 0.67 \cdot 12 + 2 - 0.24 \cdot 6 \cdot 1 + 0 + 6.28 \cdot (-2.61) \cdot 0 = 10.53\ cm^4$$

Otpornost materijala

Rezime

- Površina poprečnog preseka
- Statički moment površine poprečnog preseka
- Težište površine
- Aksijalni moment inercije
- Centrifugalni moment inercije
- Polarni moment inercije
- Štajnerova teorema - sopstveni + položajni
- Momenti inercije za zaokrenuti koordinatni sistem
- Glavni momenti inercije i glavne ose inercije
- Elipsa inercije i glavne težišne ose

Otpornost materijala

Postupak pri određivanju momenata inercije složene površine

1. Izabrati koordinatni sistem Oxy i odrediti položaj težišta
2. Odrediti momente inercija za težišne ose svake površine, pa primenom Štajnerove teoreme odrediti momente inercije za težišne ose složene površine
3. Odrediti ugao glavnih centralnih osa inercije
4. Odrediti glavne centralne momente inercije
5. Odrediti poluprečnike elipse inercije i nacrtati elipsu inercije