



## Naprezanje u dva pravca

---

Naponi i deformacije

Glavni naponi

Naprezanje sudova male debljine



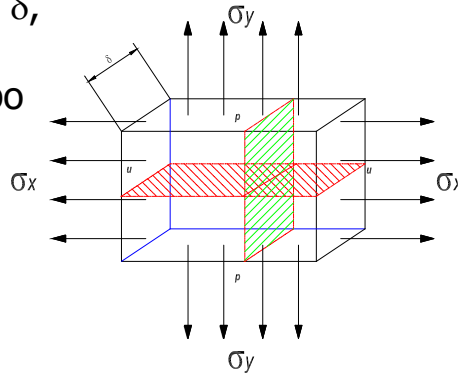
## Naprezanje u dva pravca (ravansko)

---

- Zatezanje u dva pravca
- Pritisak u dva pravca
- Zatezanje i pritisak (smicanje)

## Zatezanje u dva pravca

- Tanka ploča, debljine  $\delta$ , napregnuta je silama jednako podeljenim po površinama osnova u pravcu:
- Ox ose
- Oy ose



## Zatezanje u dva pravca

- Veličine sila na jedinicu površine označimo sa  $\sigma_x$ , odnosno  $\sigma_y$
- u pravcu Ox imamo silu X
- u pravcu Oy silu Y
- Sile X ne izazivaju napone u ravni u-u
- Sile y ne izazivaju napone u ravni p-p

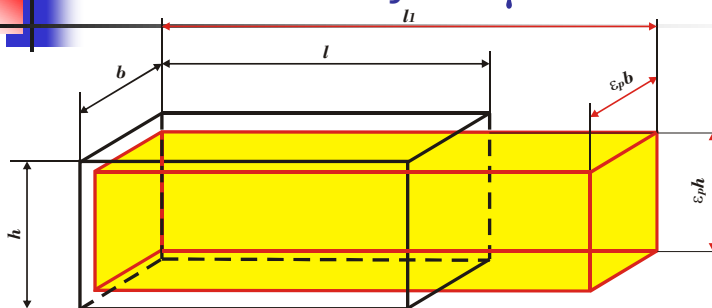
## Hukov zakon

- Od koordinatnog početka do tačke P (granice proporcionalnosti) postoji proporcionalnost između napona i dilatacije

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

- $E$  – koeficijent proporcionalnosti **MODUL ELASTIČNOSTI** ili Jungov modul  
Dimenzija napona MPa

## Poasonov koeficijent $\mu$



$\varepsilon$  – uzdužna dilatacija

$\varepsilon_p$  – poprečna dilatacija

- koeficijent zavisnosti poprečne dilatacije od uzdužne
- Poasonov koeficijent je neimenovan broj

$$\varepsilon_p = -\mu \cdot \varepsilon$$

## Dilatacija u pravcu Ox

Na osnovu pokazanih zavisnosti, dobija se:

- Pozitivna dilatacija u pravcu Ox
- Negativna poprečna dilatacija u pravcu Ox ose kao posledica istezanja u pravcu Oy ose
- Ukupna dilatacija u pravcu Ox ose

$$\frac{\sigma_x}{E}$$

$$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x - \mu \sigma_y}{E}$$

## Dilatacija u pravcu Oy

Na osnovu pokazanih zavisnosti, dobija se:

- Pozitivna dilatacija u pravcu Oy
- Negativna poprečna dilatacija u pravcu Oy ose kao posledica istezanja u pravcu Ox ose
- Ukupna dilatacija u pravcu Oy ose

$$\frac{\sigma_y}{E}$$

$$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_y - \mu \sigma_x}{E}$$

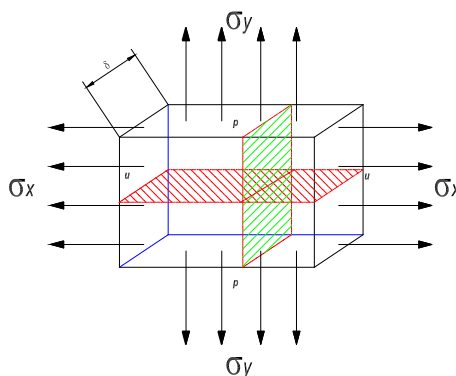
## Dilatacija u pravcu osa Ox i Oy

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x - \mu \sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = \frac{\sigma_y - \mu \sigma_x}{E}$$

## Komponentni naponi u kosom preseku – zatezanje u dva pravca

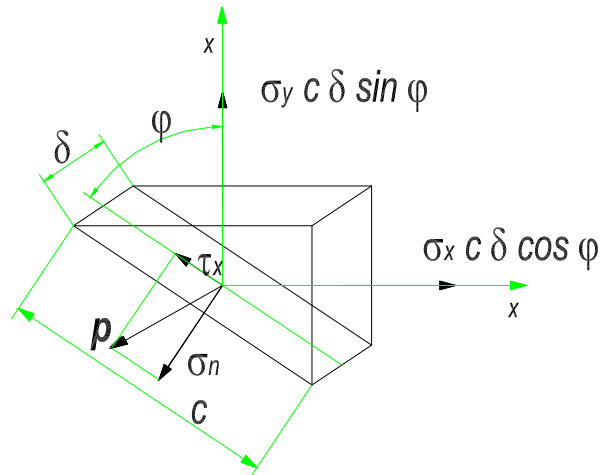
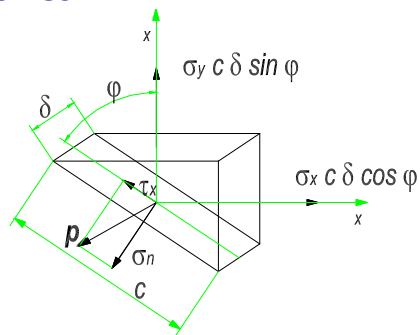
- Ako iz tanke ploče, debljine  $\delta$ , napregnute silama jednako podeljenim po površinama osnova u pravcu osa Ox i Oy, izdvojimo prizmu male debljine  $\delta$  i ispitamo ravnotežu



## Komponentni naponi u kosom preseku

$$Ax = c \delta \cos \varphi$$

$$Ay = c \delta \sin \varphi$$

Komponentni naponi u kosom preseku –  
zatezanje u dva pravca

$$\sum X_i = \sigma_x c \delta \cos \varphi - \sigma_n c b \cos \varphi - \tau c \delta \sin \varphi = 0$$

$$\sum Y_i = \sigma_y c \delta \sin \varphi - \sigma_n c b \sin \varphi + \tau c \delta \cos \varphi = 0$$

## Komponentni naponi u kosom preseku – zatezanje u dva pravca

$$\sum X_i = \sigma_x c \delta \cos \varphi - \sigma_n cb \cos \varphi - \tau c \delta \sin \varphi = 0$$

$$\sum Y_i = \sigma_y c \delta \sin \varphi - \sigma_n cb \sin \varphi + \tau c \delta \cos \varphi = 0$$

$$\sigma_n \cos \varphi + \tau \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi$$

$$\sigma_n \sin \varphi - \tau \cos \varphi = \sigma_y \sin \varphi$$

## Komponentni naponi u kosom preseku – zatezanje u dva pravca

$$\sigma_n \cos \varphi + \tau \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi \quad | \cdot \cos \varphi$$

$$\sigma_n \sin \varphi - \tau \cos \varphi = \sigma_y \sin \varphi \quad | \cdot \sin \varphi$$

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1$$

Saberemo jednačine i dobijamo normalni  
napon

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

## Komponentni naponi u kosom preseku – zatezanje u dva pravca

$$\sigma_n \cos \varphi + \tau \sin \varphi = \sigma_x \cos \varphi \quad | \cdot \sin \varphi$$

$$\sigma_n \sin \varphi - \tau \cos \varphi = \sigma_y \sin \varphi \quad | \cdot \cos \varphi$$

$$\sin \varphi \cos \varphi = \frac{1}{2} \sin 2\varphi$$

Oduzmemo drugu jednačinu od prve i dobijamo  
tangencijalni napon

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi$$

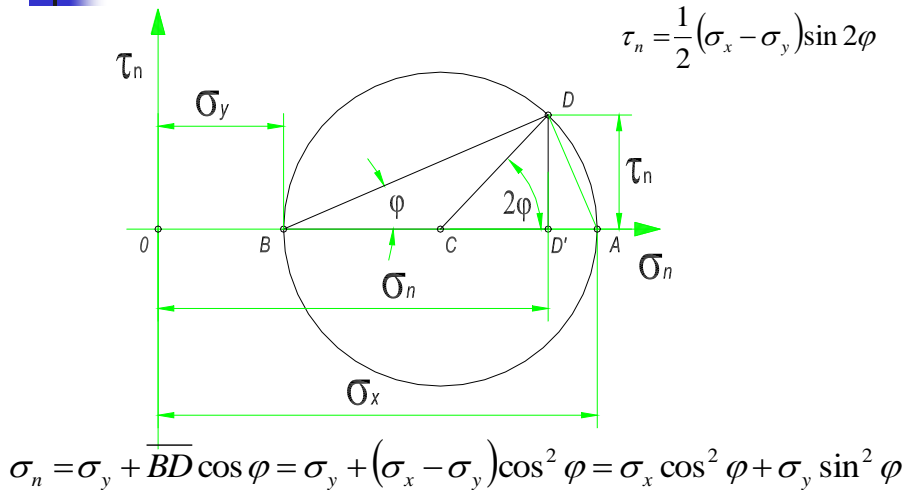
## Komponentni naponi u kosom preseku – zatezanje u dva pravca

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi + \sigma_y \sin^2 \varphi$$

$$\tau_n = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi$$



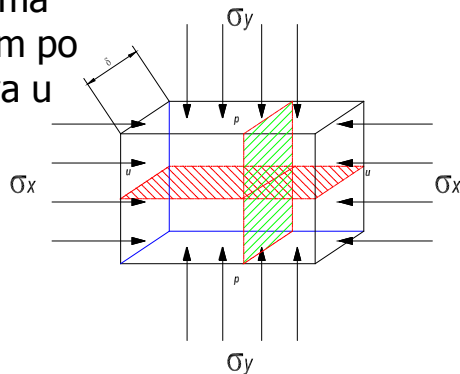
## Otpornost materijala

Komponentni naponi u kosom preseku –  
zatezanje u dva pravca - Morov krug

## Otpornost materijala

## Pritisak u dva pravca

- Tanka ploča, debljine  $\delta$ , napregnuta je silama jednako podeljenim po površinama osnova u pravcu:
- Ox ose
- Oy ose



## Dilatacija u pravcu Ox kod pritiska u dva pravca

Na osnovu pokazanih zavisnosti,  
dobija se:

- Negativna dilatacija u pravcu Ox
- Pozitivna poprečna dilatacija u pravcu Ox ose kao posledica pritiska u pravcu Oy ose
- Ukupna dilatacija u pravcu Ox ose

$$-\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E}$$

## Dilatacija u pravcu Oy kod pritiska u dva pravca

Na osnovu pokazanih zavisnosti,  
dobija se:

- Negativna dilatacija, skraćenje, u pravcu Oy
- Pozitivna poprečna dilatacija u pravcu Oy ose kao posledica sabijanja u pravcu Ox ose
- Ukupna dilatacija u pravcu Oy ose

$$-\frac{\sigma_y}{E}$$

$$\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E}$$

## Dilatacija u pravcu osa Ox i Oy kod pritiska u dva pravca

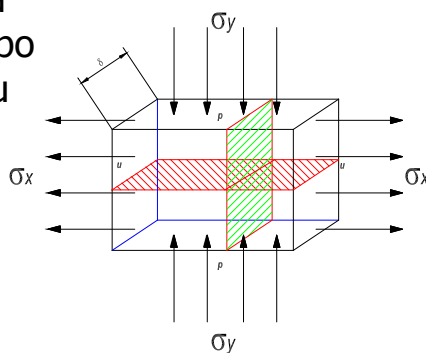
$$\varepsilon_x = -\frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} = -\frac{\sigma_x - \mu\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma_y}{E} + \mu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma_y - \mu\sigma_x}{E}$$

Po apsolutnoj vrednosti ove dilatacije su jednake zbiru dilatacija kod zatezanja u dva pravca samo suprotnog znaka

## Zatezanje i pritisak

- Tanka ploča, debljine  $\delta$ , napregnuta je silama jednako podeljenim po površinama osnova u pravcu:
  - Ox ose
  - Oy ose



## Dilatacija u pravcu Ox

Na osnovu pokazanih zavisnosti, dobija se:

- Pozitivna dilatacija u pravcu Ox
- Pozitivna poprečna dilatacija u pravcu Ox ose kao posledica pritiska u pravcu Oy ose
- Ukupna dilatacija u pravcu Ox ose

$$\frac{\sigma_x}{E}$$

$$\mu \frac{\sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x + \mu \sigma_y}{E}$$

## Dilatacija u pravcu Oy

Na osnovu pokazanih zavisnosti, dobija se:

- Negativna dilatacija u pravcu Oy
- Negativna poprečna dilatacija u pravcu Oy ose kao posledica istezanja u pravcu Ox ose
- Ukupna dilatacija u pravcu Oy ose

$$-\frac{\sigma_y}{E}$$

$$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma_y + \mu \sigma_x}{E}$$

## Dilatacija u pravcu osa Ox i Oy

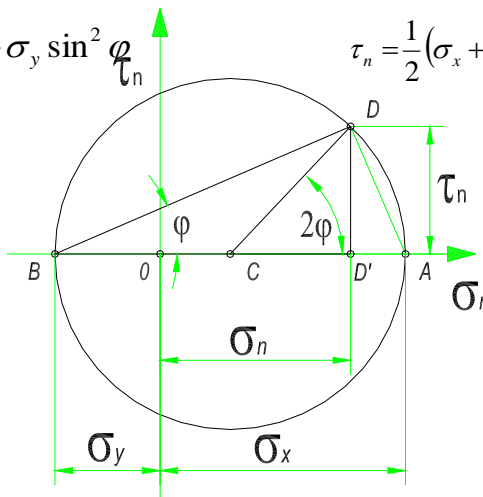
$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} + \mu \frac{\sigma_y}{E} = \frac{\sigma_x + \mu \sigma_y}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E} = -\frac{\sigma_y + \mu \sigma_x}{E}$$

## Komponentni naponi u kosom preseku – zatezanje i pritisak - Morov krug

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2 \varphi - \sigma_y \sin^2 \varphi$$

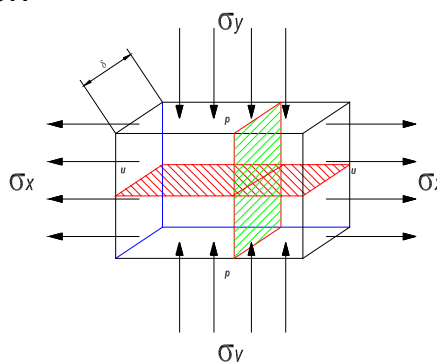
$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \sin 2\varphi$$



## Zatezanje i pritisak

- Važan slučaj je kada su pritiski i zatežujući napon jednaki po apsolutnoj vrednosti

$$\sigma_x = |-\sigma_y| = \sigma$$



## Dilatacija u pravcu osa Ox i Oy kada su pritiski i zatežujući naponi jednaki

$$\sigma_x = |-\sigma_y| = \sigma$$

$$\varepsilon_x = \frac{(1 + \mu)\sigma}{E}$$

$$\varepsilon_y = -\frac{(1 + \mu)\sigma}{E}$$

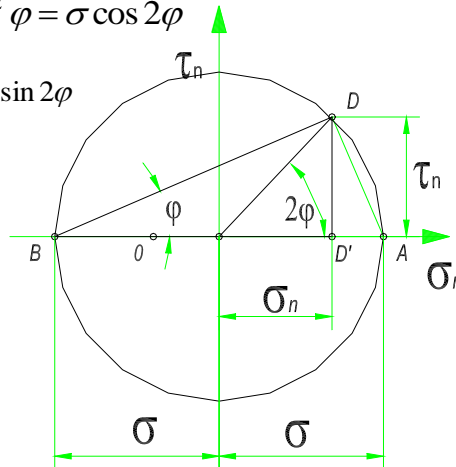
Po apsolutnoj vrednosti jednake su i dilatacije, samo suprotnog znaka kod po apsolutnoj vrednosti jednakih zatežućih i pritiskih napona

## Otpornost materijala

## Komponentni naponi u kosom preseku – jednakih napona na zatezanje i pritisak - Morov krug

$$\sigma_n = \sigma \cos^2 \varphi - \sigma \sin^2 \varphi = \sigma \cos 2\varphi$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma + \sigma)\sin 2\varphi = \sigma \sin 2\varphi$$



## Otpornost materijala

Jednaki naponi na zatezanje i pritisak – za slučaj  $\varphi=45^\circ$ 

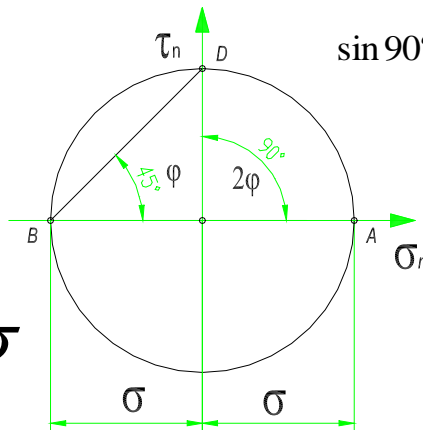
$$\sigma_n = \sigma \cos 2\varphi$$

$$\tau_n = \sigma \sin 2\varphi$$

$$\sin 90^\circ = 1 \quad \cos 90^\circ = 0$$

$$\sigma_n = 0$$

$$\tau_n = \pm \sigma$$



*Čisto smicanje*



## Rezime

- Spoljašnjoj sili suprotstavlja se unutrašnja sila, proizvod napona i površine
- Hukov zakon: napon je proporcionalan proizvodu modula elastičnosti i dilatacije
- Poprečna dilatacija – negativni proizvod Poasonovog koefijenta i podužne dilatacije
- Specijalan slučaj: brojno jednaki pritisni i zatežući napon - Za normalni napon jednak nuli tangencijalni je jednak zatežućem odnosno pritisnom naponu – čisto smicanje