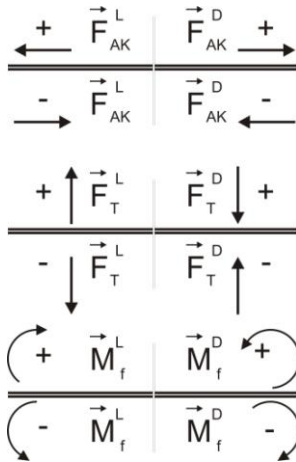


Konvencija o znacima za opterećenja grede

Levo od preseka Desno od preseka



Savijanje

Čisto savijanje (spregovima)
 Osnovne jednačine savijanja
 Savijanje silama
 Dimenzionisanje nosača izloženih savijanju

Savijanje

- Savijanje se najčešće analizira kod nosača već izučavanih u okviru mehanike I ili statike
 - Noseće konstrukcije mašina i postrojenja se se po principima statike prevode u prostorne i ravanske proste nosače
 - Opterećenja se prevode u odgovarajuće: koncentrisane sile, kontinualna opterećenja, momente i spregove
-

Čisto savijanje

Ravan savijanja

Neutralna ravan

Neutralna osa

Neutralna (elastična) linija

Čisto savijanje

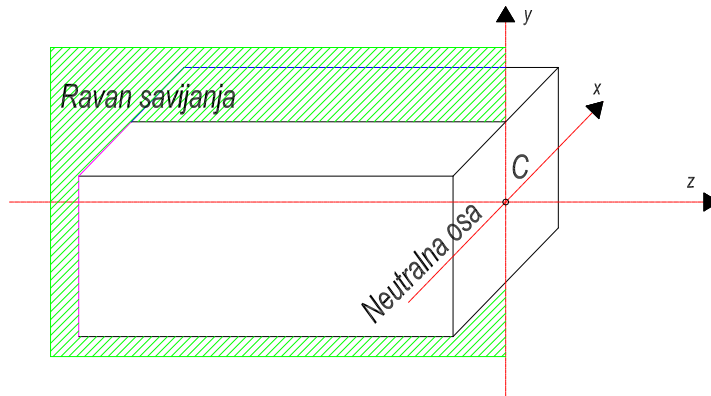
- Ako deluje samo moment savijanja, naprezanje je čisto savijanje
- Na gredu deluju dva sprega jednakih intenziteta, a suprotnih smerova u vertikalnoj ravni



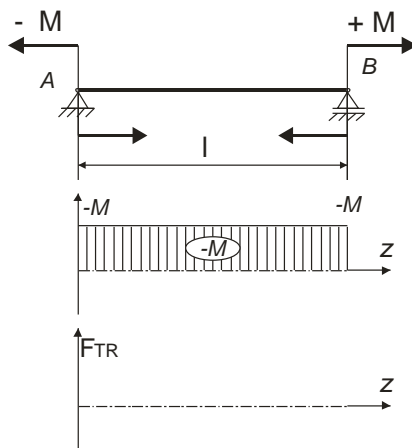
Čisto savijanje proste grede spregovima

- Spregovi istog intenziteta, a suprotnih smerova deluju u vertikalnoj ravni koja prolazi kroz uzdužnu osu nosača Az
- Ova vertikalna ravan je **RAVAN SAVIJANJA**
- Horizontalna osa u ravni koja sadrži uzdužnu osu, a upravna je na nju (obeležena sa x) naziva se **NEUTRALNA OSA**

Čisto savijanje proste grede spregovima



Čisto savijanje proste grede spregovima



$$\sum Y_i = Y_A + F_B = 0 \Rightarrow Y_A = -F_B$$

$$\sum Z_i = Z_A = 0 \Rightarrow Z_A = 0$$

$$\sum M_A = -M + M - l \cdot F_B = 0$$

$$F_B = 0 \Rightarrow Y_A = 0$$

$$M_f = -M$$

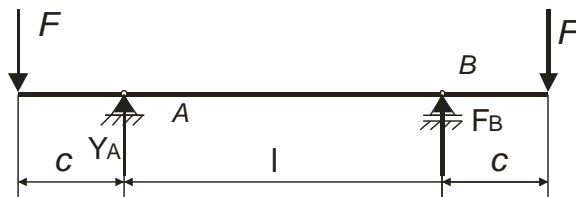
$$F_{TR} = 0$$

Čisto savijanje

- Ovakvo opterećenje grede moguće je ostvariti kod grede sa dva jednaka prepusta na čijim krajevima deluju jednake sile F



Čisto savijanje grede



$$\sum Y_i = -F + Y_A + F_B - F = 0 \Rightarrow Y_A = -F_B$$

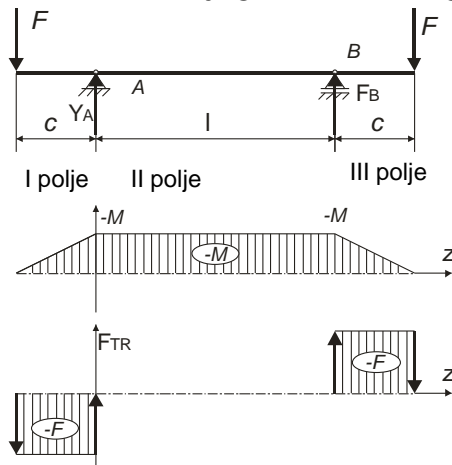
$$\sum Z_i = Z_A = 0 \Rightarrow Z_A = 0$$

$$\sum M_A = -F \cdot c + F(c+l) - l \cdot F_B = 0$$

$$F_B = -F \Rightarrow Y_A = -F$$

Čisto savijanje

- Statički dijagrami za ovu gredu sa prepustima

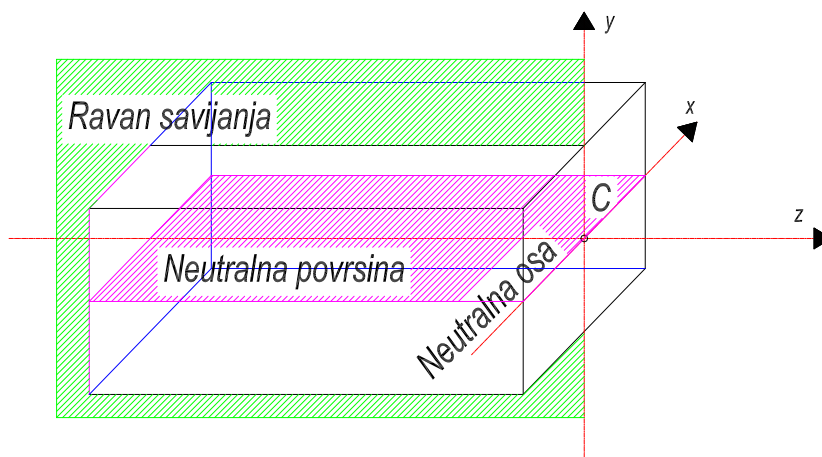


Za II polje

$$M_f = -F(c+z) + F \cdot z = -F \cdot c$$

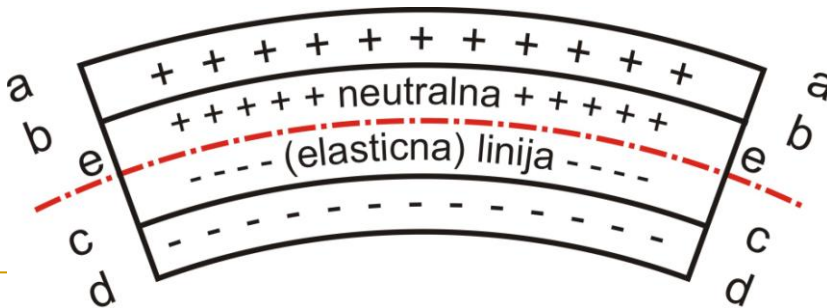
$$F_{TR} = -F + F = 0$$

Čisto savijanje

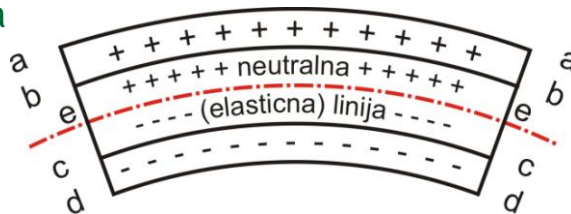


Deformacija usled savijanja momentima

- Pod dejstvom prikazanih spregova greda se deformiše tako što vlakna menjaju svoju dužinu
- Dužina jednih vlakana se povećava, a dužina drugih se smanjuje
- Vlakna koja se niti izdužuju niti skraćuju zovu se neutralna vlakna



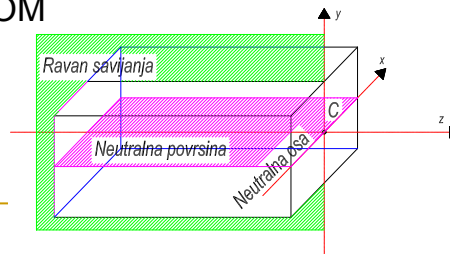
Deformacija usled savijanja momentima u ravni savijanja



- Uočava se utoliko veće izduženje vlakana ukoliko je vlakno udaljenije od neutralne ose sa spoljašnje strane (a-a veće od b-b)
- Sa druge strane, sa unutrašnje strane skraćenje vlakana je veće što su vlakna udaljenija od neutralne linije (c-c veće od d-d)
- Najviše se izdužuju spoljašnja vlakna

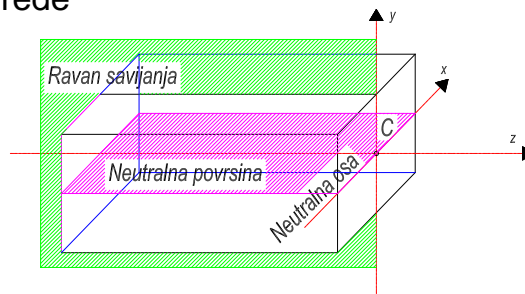
Deformacija usled savijanja momentima

- Uočena vlakna čija je dilatacija jednaka nuli (niti se izdužuju niti skraćuju)
- Neutralna vlakna se pojavljuju po čitavom poprečnom preseku
- Obrazuju neutralnu površinu
- Presečna linija ravni savijanja i neutralnih linija savijanja naziva se neutralnom linijom ili ELASTIČNOM LINIJOM



Čisto savijanje nastaje

- Kada je ravan dejstva spregova (ravan savijanja) istovremeno i ravan simetrije grede
- Kada ravan savijanja prolazi kroz geometrijsku osu Az grede



Osnovne jednačine savijanja

Veza između aksijalne deformacije i napona
I jednačina savijanja - promena normalnog napona
II jednačina savijanja – krivina elastične linije

Prizmatična greda opterećena na čisto savijanje

- Nastaju deformacije - izduženja ili skraćanja vlakana
- Poprečni preseki unutar grede su zaokrenuti jedan u odnosu na drugi
- Dilatacija posmatranih vlakana na nekom udaljenju y od neutralne linije može se dovesti u vezu sa modulom elastičnosti (Hukov zakon) i poluprečnikom krivine elastične linije

Prva jednačina savijanja

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$$

- Normalni napon u nekoj tački poprečnog preseka σ
- M – moment sprega
- I_x – aksijalni moment inercije površine za tu osu
- y – udaljenost posmatranog vlakna od ose

Druga jednačina savijanja

$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{M}{E \cdot I_x} = \frac{M}{B}$$

- K - krivina elastične linije
- M – moment sprega
- I_x – aksijalni moment inercije površine za tu osu
- E – modul elastičnosti
- $B = E \cdot I_x$ – krutost savijanja grede
- R_k – poluprečnik krivine

Prva jednačina savijanja
pokazuje da:

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$$

- Normalni napon u nekoj tački poprečnog preseka proporcionalan je napadnom momentu M savijanja i udaljenju y od neutralne ose
- Normalni napon je obrnuto proporcionalan momentu inercije poprečnog preseka za neutralnu osu I_x koja se poklapa sa težišnom osom

Prva jednačina savijanja
pokazuje da:

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$$

- Kod čistog savijanja napadni moment je u svakom preseku isti, pa normalan napon **ne zavisi** od koordinate z
- To znači da **ne zavisi** i od udaljenosti poprečnog preseka od oslonca
- Normalni napon **ne zavisi** od koordinate x , što znači da je isti u svim tačkama ravni paralelnoj koordinatnoj ravni Axz kroz osu grede Az

Prva jednačina savijanja
pokazuje da:

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$$

- Normalni napon **zavisi samo od udaljenosti vlakana** od neutralne ose Cx
- U tačkama neutralne ose Cx, on je jednak 0
- Zbog toga se ti naponi nazivaju i ivični naponi

Druga glavna jednačina savijanja pokazuje da:

$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{M}{E \cdot I_x} = \frac{M}{B}$$

- Usled savijanja osa Az se krivi i postaje elastična linija grede
- Druga glavna jednačina služi za određivanje krivine te elastične linije
- Za gredu konstantnog poprečnog preseka i konstantan napadni moment:

$$K = \text{const.}$$

Druga glavna jednačina savijanja
pokazuje da:

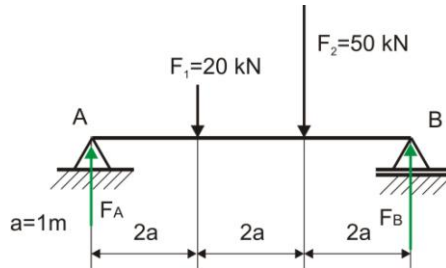
$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{M}{E \cdot I_x} = \frac{M}{B}$$

- Krivina elastične linije je konstantna
- Ovu osobinu ima samo kružni luk koji prolazi kroz oslonce A i B.
- Kod čistog savijanja elastična linija je kružni luk koji prolazi kroz oslonce A i B.

Savijanje vertikalnim teretima

koncentrisanim silama;
kontinualnim opterećenjima
u vertikalnoj ravni

Primer grede sa dve koncentrisane sile

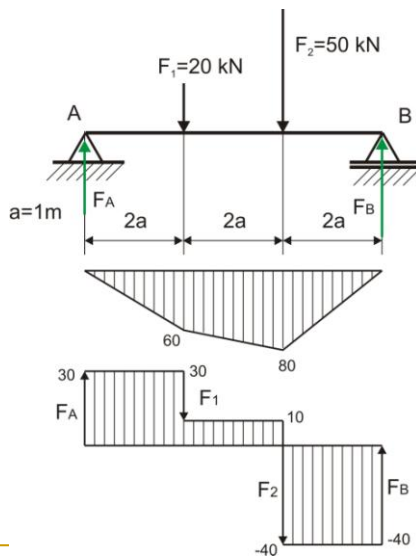


$$\sum Y_i = F_A + F_B - F_1 - F_2 = 0$$

$$\sum M_A = F_1 \cdot 2a + F_2 \cdot 4a - 6a \cdot F_B = 0$$

$$F_A = 30 \text{ kN} \quad F_B = 40 \text{ kN}$$

Primer grede sa dve koncentrisane sile



Maksimalni moment savijanja

$$M_{f_{\max}} = 80 \text{ kNm}$$

Maksimalna transverzalna sila

$$F_{t_{\max}} = 40 \text{ kN}$$

Promena transverzalne sile i momenta savijanja duž podužne ose nosača:

- U svakom poprečnom preseku imamo odgovarajuću transverzalnu silu
 - U svakom poprečnom preseku imamo odgovarajući moment savijanja.
 - **Transverzalna** sila izaziva **smicanje**
 - **Moment savijanja** izaziva **savijanje** nosača oko poprečne težišne ose
-

Jednačine savijanja važe i kod savijanja silama i moraju biti ispunjeni uslovi:

- Da neutralna linija prolazi kroz težište svih poprečnih preseka
 - Da je neutralna osa težišna osa poprečnog preseka
 - Da je neutralna osa, osa simetrije poprečnog preseka tj. glavna centralna ose inercije preseka.
-

Glavne jednačine savijanja

$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$$

$$K = \frac{1}{R_k} = \frac{M_f}{E \cdot I_x}$$

Treća glavna jednačina

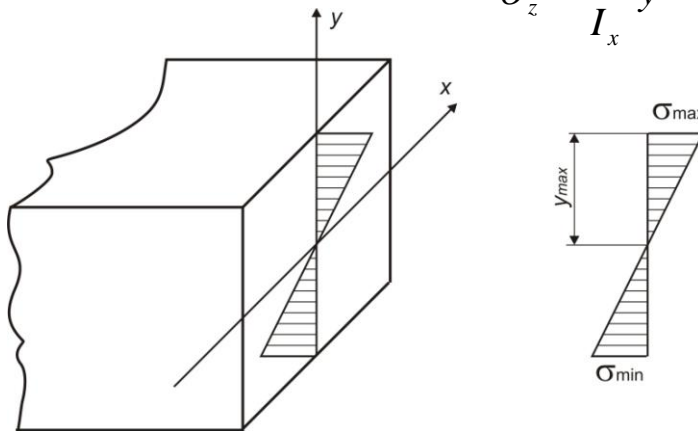
$$\tau = \frac{F_T \cdot S'_x}{I_x \cdot b}$$

τ - Tangencijalni napon grede opterećene na savijanje

S'_x - Moment inercije površine A' za neutralnu osu C_x

b - širina poprečnog preseka za neutralnu osu

Raspored normalnog napona po poprečnom preseku



Raspored normalnog napona po poprečnom preseku

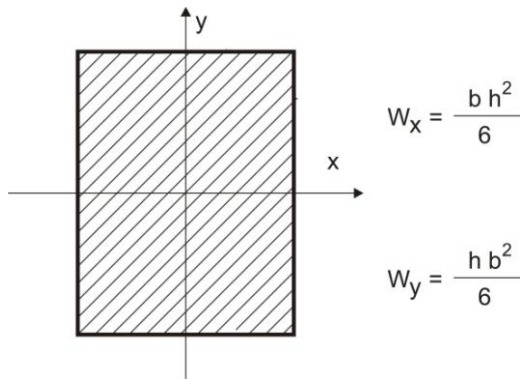
- Odnos I_x/y_{\max} zavisi od oblika poprečnog preseka i naziva se

OTPORNI MOMENT POPREČNOG PRESEKA

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad \text{L}^3$$

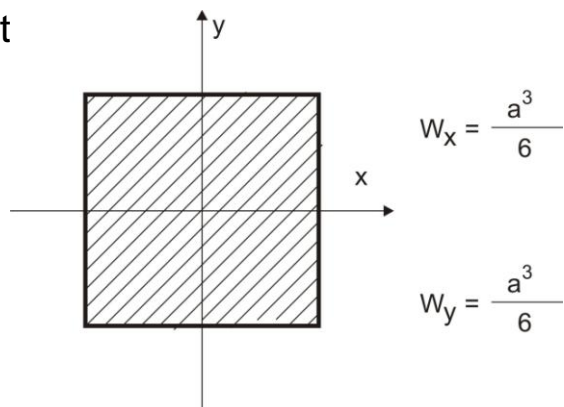
Otporni moment različitih ravnih preseka

- pravougaonik



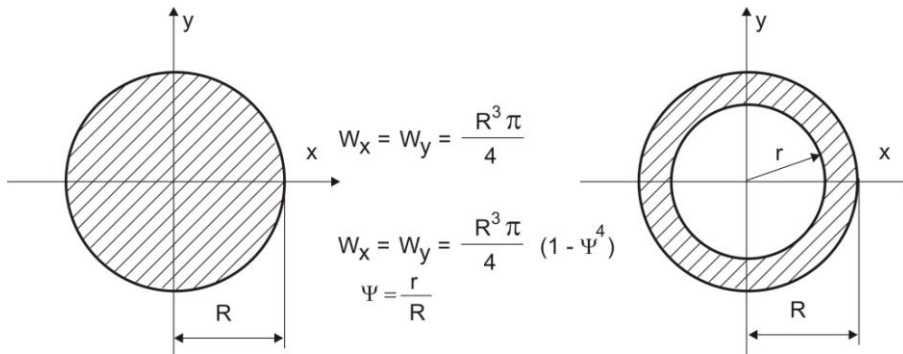
Otporni moment različitih ravnih preseka

- kvadrat



Otporni moment različitih ravnih preseka

■ Krug i kružni prsten



Raspodela tangencijalnog napona po poprečnom preseku

$$\tau = \frac{F_T \cdot S'_x}{I_x \cdot \xi}$$

F_T – Transverzalna sila

τ - Tangencijalni napon grede opterećene na savijanje

S'_x - Moment inercije površine A' za neutralnu osu Cx

ξ - promenljiva širina poprečnog preseka za neutralnu osu

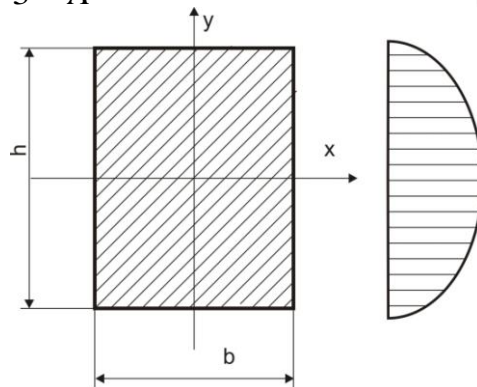
Maksimalni normalni napon nosača izloženog opterećenju na savijanje

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x}$$

- Maksimalni normalni napon
- Maksimalni moment savijanja
- Otporni moment poprečnog preseka

Raspodela tangencijalnog napona po poprečnom preseku pravougaonika

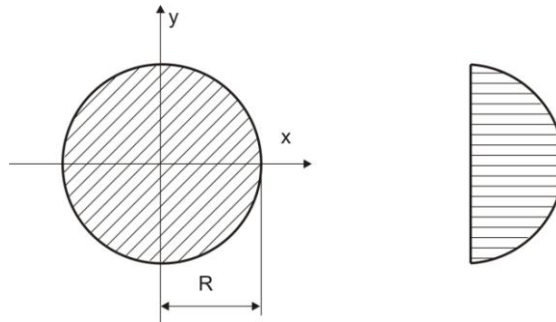
$$\tau_{\max} = \frac{2}{3} \frac{F_{T \max}}{A} \quad \tau = \tau_{\max} \left[1 - 4 \left(\frac{y}{h} \right)^2 \right]$$



Raspodela tangencijalnog napona po poprečnom preseku kruga

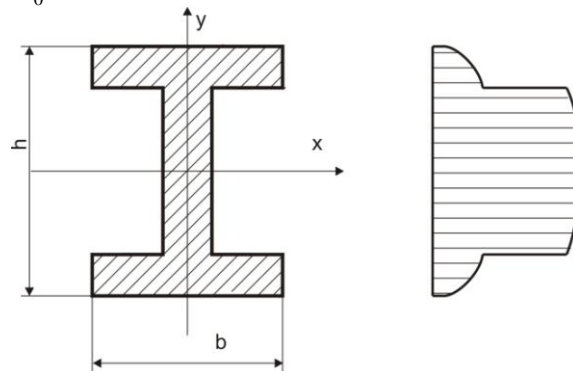
$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{F_{T \max}}{A}$$

$$\tau = \tau_{\max} \left[1 - \left(\frac{y}{R} \right)^2 \right]$$



Raspodela tangencijalnog napona po poprečnom preseku limenog nosača

$$\tau_{\max} = \frac{F_{T \max}}{A_0}$$



Dimenzionisanje nosača opterećenih na savijanje

- Postoje dva različita zadatka:
 1. Poznato je opterećenje koje deluje na nosač, a treba odrediti vrednosti najvećeg normalnog i tangencijalnog napona koji se javljaju
 2. Poznato je opterećenje, raspon, način oslanjanja i oblik nosača koji se mora upotrebiti, a traže se dimenzije poprečnog preseka

Određivanje veličina normalnog i tangencijalnog napona ako je poznato opterećenje

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \qquad \tau = \frac{F_T \cdot S'_x}{I_x \cdot \xi}$$

- Najveći normalni napon javlja se u opasnom preseku, u najudaljenijem vlaknu
- Najveći tangencijalni napon javlja se u preseku u kome je najveća tangencijalna sila
- Opasni presek – najveći moment savijanja i najveća transverzalna sila definišu se iz statičkih dijagrama nosača

Određivanje dimenzija poprečnog preseka nosača

$$\sigma_{\max} \leq \sigma_{fdoz}$$

Maksimalni napon manji od dozvoljenog

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq \sigma_{fdoz}$$

$$W_x = \frac{M_{\max}}{\sigma_{fdoz}}$$

- Prema definisanom opterećenju izračunati otporni moment preseka
- Po određivanju dimenzija proveriti da li je tangencijalni napon manji od dozvoljenog

$$\tau_{\max} \leq \tau_{fdoz}$$

Provera tangencijalnih napona

- Kod čeličnih konstrukcija tangencijalni naponi su vrlo mali pa se ova provera često i ne vrši
- Proveru obavezno vršiti kod drvenih konstrukcija

Rezime: Dimenzionisanje nosača

- Odrediti otpore oslonaca
 - Nacrtati statičke dijagrame i iz njih odrediti najveći napadni moment i najveću transverzalnu silu
 - Prema izabranom materijalu definisati dozvoljene napone na savijanje
 - Odrediti otporni moment poprečnog preseka
 - Proveriti da li su najveći normalni i tangencijalni napon manji od dozvoljenih
-