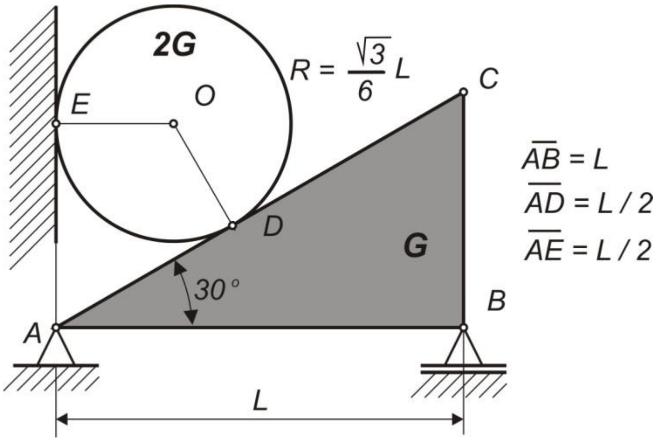
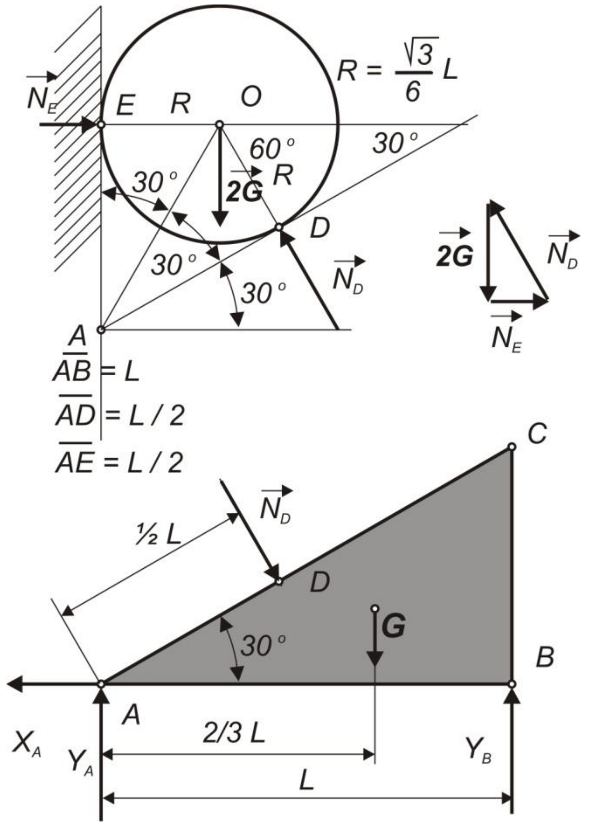
Zadatak 1



Homogena ploča ABC oblika pravouglog trougla, težine G, čija je strana AB=L, se oslanja na nepokretan oslonac A i pokretan oslonac B. Homogeni disk težine 2G i poluprečnika $R = \frac{\sqrt{3}}{6} L$ oslanja se na stranu AC homogene ploče i na glatki vertikalni zid.

Odrediti reakcije oslonca A i B.

Rešenje:



Za disk

$$\sum X_i = N_E - N_D cos60° = 0 \rightarrow N_E$$

$$\sum Y_i = N_D sin60° - 2G = 0 \rightarrow N_D$$

$$N_D = \frac{2G}{sin\,60°} = \frac{2G}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} G$$

$$N_E = N_D cos60° = \frac{4\sqrt{3}}{3} G \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} G$$

Za trougaonu ploču:

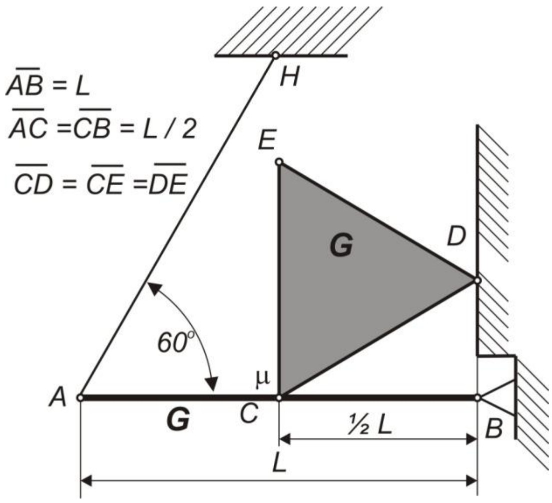
$$\sum X_i = -X_A + N_D cos60° = 0 \rightarrow X_A = N_D cos60° = \frac{4\sqrt{3}}{3} G \cdot \frac{1}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{3} G$$

$$\sum Y_i = Y_A - N_D sin60° - G + Y_B = 0 \rightarrow Y_A$$

$$\sum M_A = N_D \frac{L}{2} + G \cdot \frac{2L}{3} - Y_B \cdot L = 0 \rightarrow Y_B = \frac{4\sqrt{3}}{3} G + G \cdot \frac{2}{3} = \left(\sqrt{3} + 1\right) \frac{2}{3} G = \frac{2+2\sqrt{3}}{3} G$$

$$Y_A = N_D sin60° + G - Y_B = \frac{4\sqrt{3}}{3} G \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + G - \frac{2+2\sqrt{3}}{3} G = \frac{7-2\sqrt{3}}{3} G$$

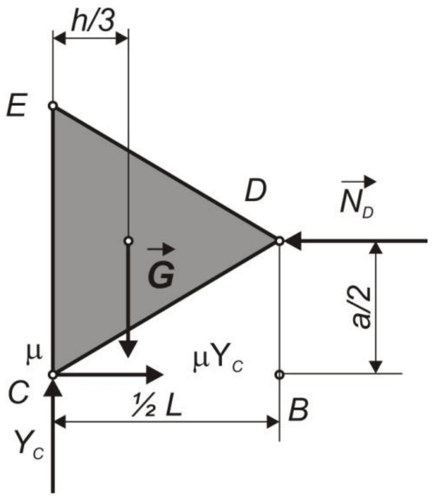
Zadatak 2



Sistem krutih tela sastoji se od homogene ploče CDE oblika jednakostraničnog trougla, težine G, koji se oslanja na nepokretan hrapavu gredu AB i na glatki vertikalni zid. Tačka C je na sredini grede AB tako a ploča je postavljana tako da osnovica CE zaklapa ugao od 90° sa gredom, odnosno paralelna je sa vertikalnim glatkim zidom. Gredu u horizontalnom položaju zadržava nerastegljivo uže vezano u tačkama A i H. Uže sa gredom zaklapa ugao od 60°. Na drugom kraju greda AB je oslonjena na nepokretni oslonac B. Sistem je u ravnoteži u prikazanom položaju.

Odrediti reakcije oslonca B, silu u užetu AH i koeficijent trenja između grede i ploče.

Rešenje:



kod jednakostraničnog trougla i sa slike

$h = \frac{1}{2}L = \frac{a\sqrt{3}}{2} \rightarrow a = \frac{L\sqrt{3}}{3}$

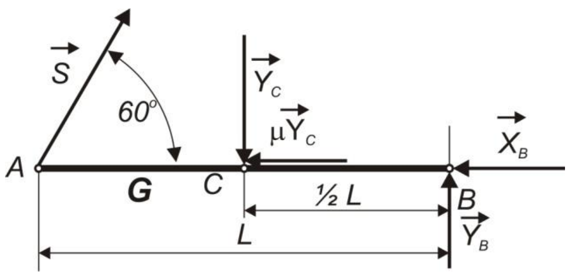
$\sum X_i = \mu Y_C - N_D = 0 \rightarrow \mu = \frac{N_D}{Y_C}$

$\sum Y_i = Y_C - G = 0 \rightarrow Y_C = G$

$\sum M_C = -N_D \frac{a}{2} + G \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{L}{2} = 0 \rightarrow N_D$

$N_D = \frac{2}{a} \cdot \frac{L}{6} G = \frac{3}{L\sqrt{3}} \cdot \frac{L}{6} G = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot G$

$\mu = \frac{N_D}{Y_C} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot G}{G} = \frac{\sqrt{3}}{6}$



Greda: $\sum X_i = S\cos 60° - X_B - \mu Y_C = 0$

$\sum Y_i = Y_B - Y_C + S\sin 60° - G = 0$

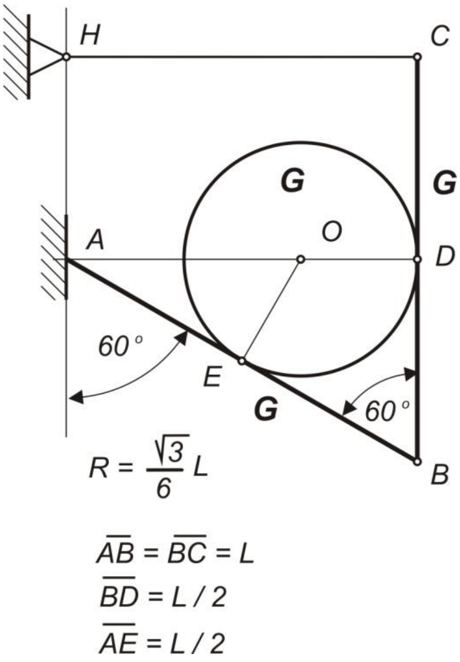
$\sum M_B = S\sin 60° \cdot L - Y_C \frac{L}{2} - G\frac{L}{2} = 0$

$S = \frac{1}{L\sin 60°}\left(Y_C \frac{L}{2} + G\frac{L}{2}\right) = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(\frac{G}{2} + \frac{G}{2}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} G$

$Y_B = Y_C + G - S\sin 60° = \mathrm{G} + \mathrm{G} - \frac{2\sqrt{3}}{3} G \frac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{G}$

$X_B = S\cos 60° - \mu Y_C = \frac{2\sqrt{3}}{3} G \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot G = \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot G$

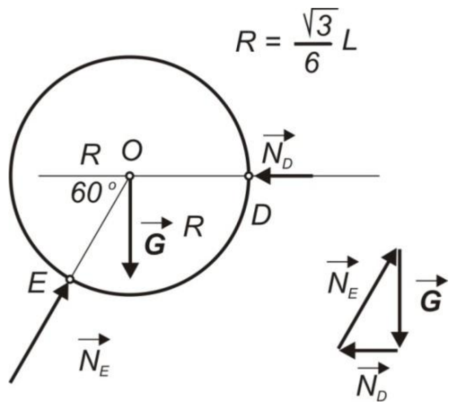
Zadatak 3



Sistem krutih tela sastoji se od konzole AB dužine L i težine G, grede BC dužine L i težine G, nerastegljivog užeta CH i homogenog diska O, prečnika R i težine G. Disk se oslanja u tačkama E i D koje su sredine greda AB i BC. Greda BC je vertikalna dok konzola AB zaklapa ugao od 60°, uže CH je horizontalno. Konzola i greda su zglobno vezane u tački B a u tački A konzola je uklještena.

Odrediti reakcije oslonca A, silu u užetu AH.

Rešenje:



Za disk

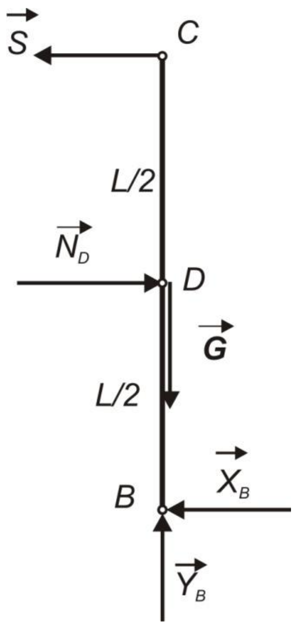
$\sum X_i = -N_D + N_E cos60° = 0 \rightarrow N_D$

$\sum Y_i = N_E sin60° - G = 0 \ \rightarrow N_D$

$N_E = \frac{G}{sin\,60°} = \frac{G}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}G$

$N_D = N_E cos60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}G \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}G$

Za gredu BC:



$\sum X_i = N_D - S - X_B = 0$

$\sum Y_i = Y_B - G = 0$

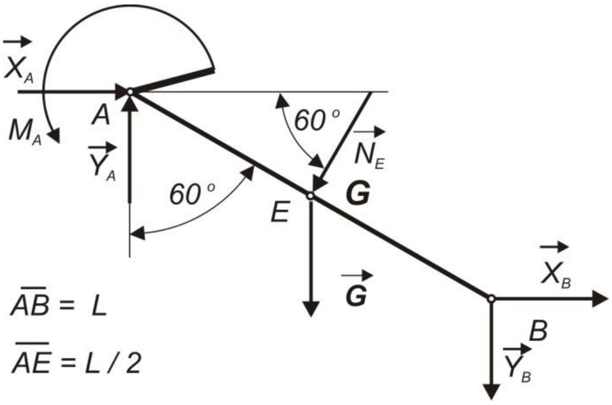
$\sum M_C = X_B \cdot L - N_D \frac{L}{2} = 0$

$X_B = \frac{1}{2} N_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} G = \frac{\sqrt{3}}{6} G$

$S = N_D - X_B = \frac{\sqrt{3}}{3} G - \frac{\sqrt{3}}{6} G = \frac{\sqrt{3}}{6} G$

$Y_B = G$

Za konzolu AB:



$\sum X_i = X_A - N_E cos60° + X_B = 0$

$\sum Y_i = Y_A - Y_B - N_E sin60° - G = 0$

$X_A = N_E cos60° - X_B = \frac{2\sqrt{3}}{3} G \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} G = \frac{\sqrt{3}}{6} G$

$Y_A = Y_B + N_E sin60° + G = G + \frac{2\sqrt{3}}{3} G \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + G = 3G$

$\sum M_A = -M_A + Y_B \cdot Lsin60° + G \cdot \frac{1}{2} Lsin60° + N_E \cdot \frac{L}{2} = 0$

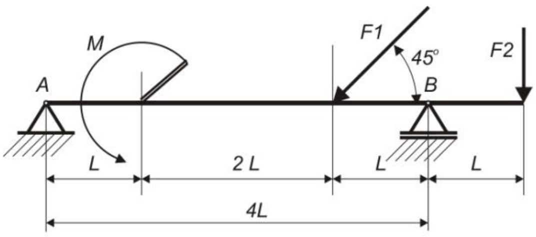
$M_A = Y_B \cdot Lsin60° + G \cdot \frac{1}{2} Lsin60° + N_E \cdot \frac{L}{2} - X_B \cdot Lcos60°$

$M_A = G \cdot L \frac{\sqrt{3}}{2} + G \cdot \frac{1}{2} L \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot G \cdot \frac{1}{2} L - \frac{1}{2} L \frac{\sqrt{3}}{6} G = \frac{6+3+4-1}{12} \sqrt{3} GL$

$M_A = \sqrt{3} GL$

Zadatak 4.

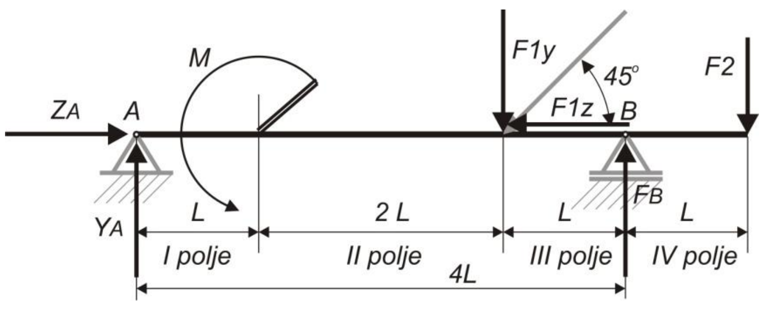
Za gredu sa prepustom prikazanu na slici, odrediti reakcije veza i nacrtati statičke dijagrame: aksijalne sile, transverzalne sile i momenta savijanja, ako su opterećenja raspoređena kao na slici 2.



$M = 7\ kNm,\ F_1 = 3\sqrt{2}\ kN,\ F_2 = 2kN,$

Dužina grede je 5L, raspon 4L=4m i prepust L=1m, odnosno raspon grede 4L

Rešenje:



$F_{1Z} = F_1 cos\alpha = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\ kN$

$F_{1Y} = F_1 sin\alpha = 3\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 3kN$

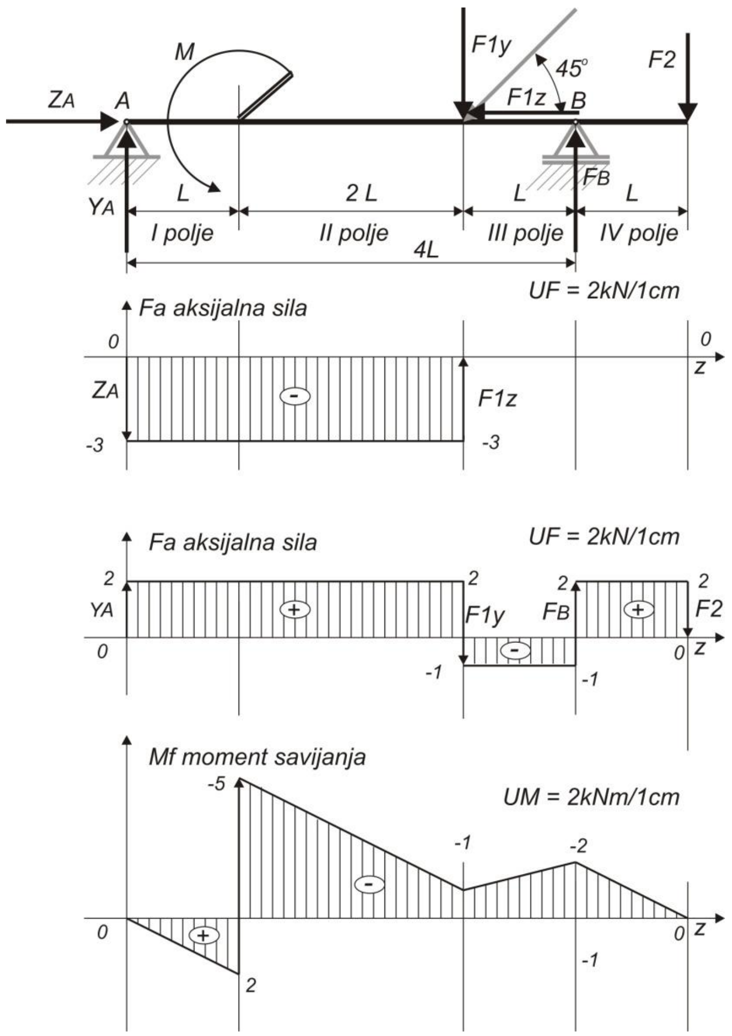
1. $\sum Z_i = Z_A - F_{1Z} = 0 \rightarrow Z_A = F_{1Z} = 3kN$
2. $\sum Y_i = Y_A + F_B - F_{1Y} - F_2 = 0 \rightarrow Y_A$
3. $\sum M_A = -M + 3L \cdot F_{1Y} - 4L \cdot F_B + 5L \cdot F_2 = 0 \rightarrow F_B$

$F_B = \frac{1}{4L}(-M + 3L \cdot F_{1Y} + 5L \cdot F_2) = \frac{1}{4 \cdot 1}(-7 + 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 \cdot 2) = 3kN$

$Y_A = +F_{1Y} + F_2 - F_B = 3 + 2 - 3 = 2\ kN$

Provera

$\sum M_B = 4L \cdot Y_A - M - L \cdot F_{1Y} + L \cdot F_2 = 4 \cdot 1 \cdot 2 - 7 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 0$



I polje 0<z<L   L=1m

Aksijalna sila $F_a = -Z_A = -3kN$

Transverzalna sila

$F_T = +F_A = 2\ kN$

Moment savijanja

$M_f = +F_A \cdot z = 2 \cdot z\ \ kNm$

$M_{fz=0} = +F_A \cdot 0 = 0$

$M_{fz=L} = F_A \cdot L = 2 \cdot 1 = 2\ \ kNm$

II polje L<z<3L   L=1m

Aksijalna sila $F_a = -Z_A = -3kN$

Transverzalna sila

$F_T = +F_A = 2\ kN$

Moment savijanja

$M_f = +F_A z - M = 2z\ - 7\ \ kNm$

$M_{fz=L} = 2 \cdot 1 - 7 = -5\ \ kNm$

$M_{fz=3L} = 2 \cdot 3\ - 7 = -1\ \ kNm$

III polje 3L<z<4L   L=1m

Aksijalna sila $F_a = -Z_A + F_{1Z} = -3 + 3 = 0\ kN$

Transverzalna sila $F_T = +F_A - F_{1Y} = 2 - 3 = -1\ kN$

Moment savijanja $M_f = +F_A \cdot z - M - F_{1Y}(z - 3L) = 2 \cdot z\ - 7 - 3(z - 3) = -z + 2\ \ kNm$

$M_{fz=3L} = -3 + 2 = -1\ \ kNm$

$M_{fz=4L} = -4 + 2 = -2\ \ kNm$

IV polje 4L<z<5L   L=1m

Aksijalna sila $F_a = -Z_A + F_{1Z} = -3 + 3 = 0\ kN$

Transverzalna sila $F_T = +F_A - F_{1Y} + F_B = 2 - 3 + 3 = 2\ kN$

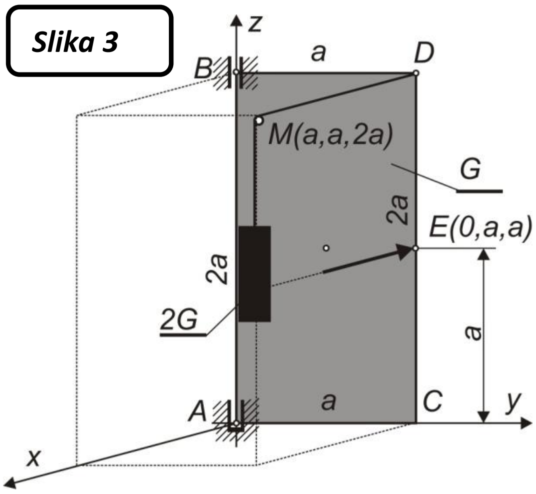
Moment savijanja

$M_f = +F_A \cdot z - M - F_{1Y}(z - 3L) + F_B(z - 4L) = 2 \cdot z\ - 7 - 3(z - 3) + 3(z - 4) = 2z - 6\ kNm$

$M_{fz=4L} = 8 - 10 = -2\ kNm$

$M_{fz=5L} = 10 - 10 = 0\ kNm$

Zadatak 5.



Pravougaona ploča ABCD težine G, stranica a i 2a, leži u vertikalnoj ravni. Vezana je sfernim zglobom A i cilindričnim zglobom B. U tački D je vezano uže DM i prebačeno preko kotura M zanemarljivih dimenzija. O uže je okačen teret težine 2G. U tački E na sredini desne ivice ploče deluje horizontalna sila F normalna na ploču. $\vec{F} = -F\,\vec{\imath}$

Za položaj ravnoteže na slici 3 odrediti reakcije ležišta A i B kao i silu F kojom se ploča drži u ravnoteži.

Rešenje:

Poznata opterećenja: $\vec{G} = (0,0,-G)$, $\overrightarrow{2G} = (0,0,-2G)$

Nepoznate veličine: $\overrightarrow{F_A} = (X_A, Y_A, Z_A)$ $\overrightarrow{F_B} = (X_B, Y_B, 0)$ $\vec{F} = -F\,\vec{\imath}$

$\overrightarrow{S_D} = (2G, 0,0)$

1. $\sum X_i = X_A + X_B + S - F = 0$
2. $\sum Y_i = Y_A + Y_B = 0$
3. $\sum Z_i = Z_A - G = 0$
4. $\sum M_x = -Y_B \cdot 2a - G \cdot \frac{a}{2} = 0$
5. $\sum M_y = X_B \cdot 2a + S \cdot 2a - F \cdot a = 0$
6. $\sum M_z = -S \cdot a + F \cdot a = 0$

6)→ $F = S = 2G$

5) → $X_B = \frac{1}{2a}(F \cdot a - S \cdot 2a) = \frac{1}{2}(2G - 4G) = -G$

4) → $Y_B = \frac{1}{4}G$

3) → $Z_A = G$

2) → $Y_A = -Y_B = -\frac{1}{4}G$

1) → $X_A = F - S - X_B = 2G - 2G + G = G$

$\overrightarrow{F_A} = \left(G, -\frac{1}{4}G\ , G\right)$

$F_A = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{4}G\right)^2 + G^2} = \frac{\sqrt{33}}{4}G$

$\overrightarrow{F_B} = \left(-G, \frac{1}{4}G\ , 0\right)$

$F_A = \sqrt{G^2 + \left(\frac{1}{4}G\right)^2} = \frac{\sqrt{17}}{4}G$