Prostorni sistem sila i momenata

Moment sile za tačku kao vektorski proizvod
Proizvoljni prostorni sistem sila
Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema
Ravnoteža sistema krutih tela u prostoru
Primer rešavanja prostornih zadataka

Moment sile za tačku

- Moment sile za tačku je težnja sile da obrne telo oko posmatrane tačke A
- Mera tog obrtnog dejstva je spreg koji se naziva ***momentom sile za tačku A***
- Moment sile za tačku je ***VEKTOR***

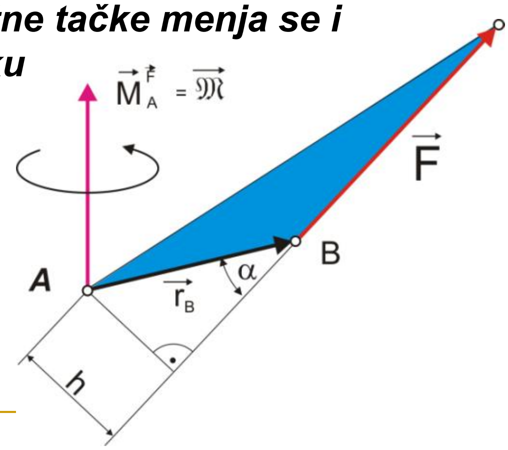
$$\vec{\mathfrak{M}} = \vec{M}_A^{\vec{F}} = \vec{r}_B \times \vec{F}$$

- Intenzitet ovog vektorskog proizvoda je

$$M_A^{\vec{F}} = r_B \cdot F \cdot \sin\alpha = F \cdot h = 2P_{\Delta ABC}$$

Moment sile za tačku

- ***Momentom sile za tačku je VEKTOR određen baš za tu definisanu tačku***
- ***Promenom momentne tačke menja se i moment sile za tačku***

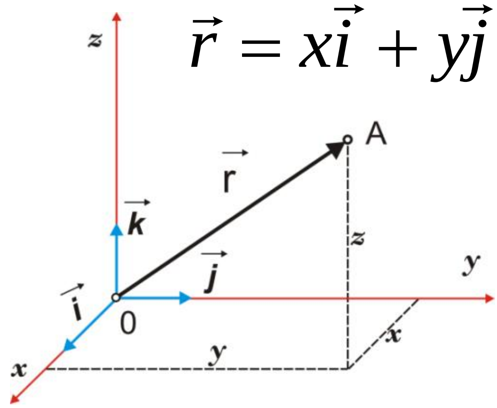


Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod

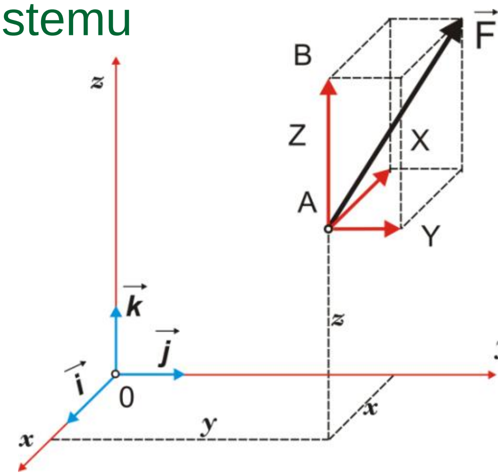
- Ako sila $\vec{F}$ deluje u tački A
- Položaj tačke A može se odrediti vektorom položaja tačke A u Dekartovom koordinatnom sistemu
- Usvojiti koordinatni početak za početak vektora položaja i tačku O oko se koje vrši obrtanje za koordinatni početak
- Moment sile za tačku O definiše se kao vektorski proizvod

Vektor položaja tačke A u Dekartovom koordinatnom sistemu

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

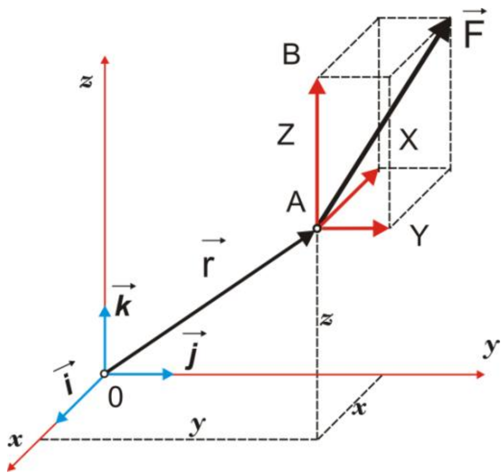


Sila kao vektor u Dekartovom koordinatnom sistemu



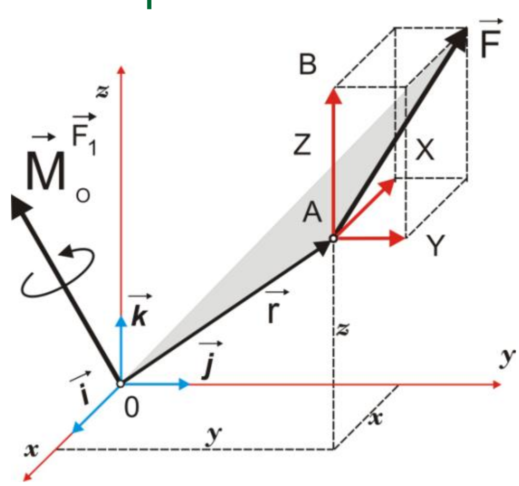
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$$

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod



$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix}$$

Vektor momenta sile za tačku se može, kao i svaki drugi vektor, prikazati preko tri upravne koordinate

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = M_{Ox}^{\vec{F}}\,\vec{i} + M_{Oy}^{\vec{F}}\,\vec{j} + M_{Oz}^{\vec{F}}\,\vec{k}$$

Vektor momenta sile za tačku se može, kao i svaki drugi vektor, prikazati preko tri upravne koordinate

Moment sile za tačku prikazan kao vektorski proizvod

$$\vec{M}_O^{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix} \vec{k} =$$

$$= M_{Ox}^{\vec{F}} \vec{i} + M_{Oy}^{\vec{F}} \vec{j} + M_{Oz}^{\vec{F}} \vec{k}$$

Moment sile za tačku

Intenziteti komponenata momenta sile za tačku po osama

$$M_{Ox}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix} = yZ - zY$$

$$M_{Oy}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} x & z \\ X & Z \end{vmatrix} = zX - xZ$$

$$M_{Oz}^{\vec{F}} = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Z \end{vmatrix} = xZ - yX$$

Moment sile za tačku

Intenzitet vektora momenta sile za tačku

$$\left|\vec{M}_{O}^{\vec{F}}\right| = \sqrt{\left(M_{Ox}^{\vec{F}}\right)^2 + \left(M_{Oy}^{\vec{F}}\right)^2 + \left(M_{Oz}^{\vec{F}}\right)^2}$$

Pravac vektora momenta sile za tačku

$$\cos\alpha_M = \frac{M_{Ox}^{\vec{F}}}{\left|\vec{M}_{O}^{\vec{F}}\right|} \qquad \cos\beta_M = \frac{M_{Oy}^{\vec{F}}}{\left|\vec{M}_{O}^{\vec{F}}\right|} \qquad \cos\gamma_M = \frac{M_{Oz}^{\vec{F}}}{\left|\vec{M}_{O}^{\vec{F}}\right|}$$

Proizvoljni sistem sila u prostoru

Na telo u prostoru deluje

- Proizvoljni sistem sila u prostoru

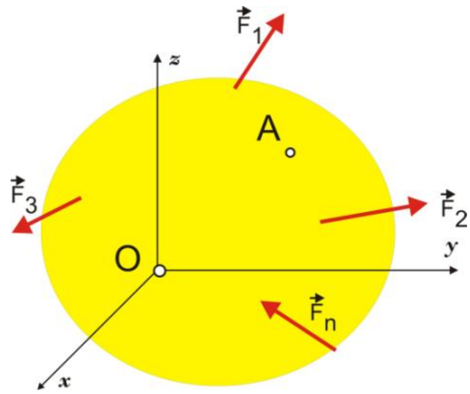
Ovi vektori se mogu sabrati u bilo kojoj tački i njihovo dejstvo zameniti

- glavnim vektorom proizvoljnog sistema sila
- Glavni moment proizvoljnog sistema sila- zbir momenata posledica redukcije sila u tačku (zavisi od odabrane redukcione tačke)

Kao što je pokazano paralelno pomeranje sile u proizvoljnu tačku kao rezultat ima pomerenu silu i moment jednak proizvodu veličine pomeranja sile

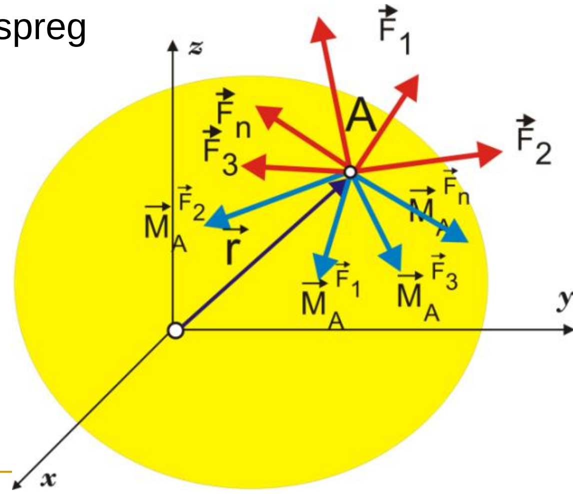
Proizvoljni sistem sila u prostoru

Na telo u prostoru deluje proizvoljni sistem sila



Proizvoljni sistem sila u prostoru

Proizvoljni sistem sila se može redukovati u tačku paralelna sila i spreg



Glavni vektor i glavni moment proizvoljnog sistema sila uprostoru

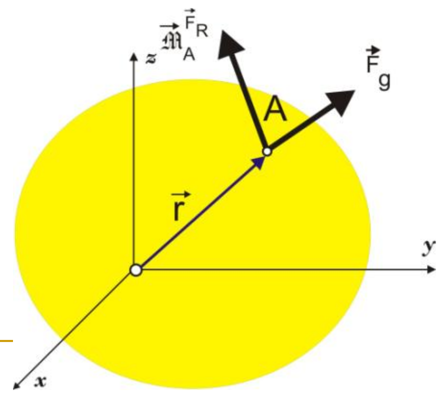
Redukcijom proizvoljnog sistema sila u neku tačku A dobija se

- Glavni vektor sistema sila

$$\vec{F}_g = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

- Spreg - Glavni moment

$$\vec{\mathfrak{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A^{\vec{F}_i}$$



Glavni vektor proizvoljnog sistema sila u prostoru

Predstavlja vektorski zbir svih proizvoljnih sila koje deluju na posmatrano telo u prostoru

$$\vec{F}_g = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Analitički sabiranje sila se sprovodi na sabiranje projekcije sila na odgovarajuće ose

$$F_{gx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \qquad F_{gy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \qquad F_{gz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

Glavni moment proizvoljnog sistema sila u prostoru

Predstavlja vektorski zbir svih spregova proizvoljnih sila koje deluju na posmatrano telo u prostoru koji su posledica pomeranja sila u tačku A

$$\vec{\mathfrak{M}}_A = \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_A^{\vec{F}_i}$$

Kako je glavni moment zavisi od redukcione tačke to se mora naglasiti za koju tačku je izvršena redukcija

Glavni vektor i glavni moment proizvoljnog sistema sila i spregova u prostoru

Ako na telu deluje proizvoljni sistem spregova u prostoru

- Proizvoljni sistem spregova u prostoru, kako su spregovi slobodni vektori, mogu se vektorski sabrati i njihovo dejstvo zameniti dejstvom jednog sprega

$$\vec{\mathfrak{M}}_S = \sum_{j=1}^{n} \vec{\mathfrak{M}}_j$$

Glavni vektor i glavni moment proizvoljnog sistema sila

Proizvoljni sistem sila u prostoru može se redukovati u bilo koju tačku pa i u tačku O

Kao što je pokazano kao rezltat se dobija

- sistem sučeljnih sila koji se vektorskim zbirom svodi na jednu silu – glavni vektor i
- sistem spregova koji se vektorski može sabrati u jedan spreg – glavni moment

Glavni vektor i glavni moment proizvoljnog sistema sila i spregova u prostoru

Redukcijom proizvoljnog sistema sila u neku tačku ***O*** dobija se

- Glavni vektor sistema sila

$$\vec{F}_g = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

- Glavni vektor sistema sila i spregova

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \vec{\mathfrak{M}}_S + \vec{\mathfrak{M}}_O = \vec{\mathfrak{M}}_S + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$$

Proizvoljni sistem sila i spregova u prostoru

Na telo u prostoru deluje

- Proizvoljni sistem sila u prostoru
- Proizvoljni sistem spregova u prostoru

Ovi vektori se mogu sabrati u bilo kojoj tački i njihovo dejstvo zameniti

- glavnim vektorom proizvoljnog sistema sila
- Glavni moment proizvoljnog sistema sila i spregova – zbir proizvoljnog sistema spregova i momenata posledica redukcije sila u tačku

Glavni vektor proizvoljnog sistema sila i spregova u prostoru

Predstavlja vektorski zbir svih proizvoljnih sila koje deluju na posmatrano telo u prostoru

$$\vec{F}_g = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i$$

Analitički sabiranje sila se sprovodi na sabiranje projekcije sila na odgovarajuće ose

$$F_{gx} = \sum_{i=1}^{n} F_{ix} \qquad F_{gy} = \sum_{i=1}^{n} F_{iy} \qquad F_{gz} = \sum_{i=1}^{n} F_{iz}$$

Glavni vektor proizvoljnog sistema sila i spregova u prostoru

Intenzitet glavnog vektora

$$F_g = \sqrt{F_{gx}^2 + F_{gy}^2 + F_{gz}^2}$$

Kosinusi uglova ovog vektora i koordinatnih osa

$$\cos\alpha_g = \frac{F_{gx}}{F_g} \qquad \cos\beta_g = \frac{F_{gy}}{F_g} \qquad \cos\gamma_g = \frac{F_{gz}}{F_g}$$

Glavni moment proizvoljnog sistema sila i spregova u prostoru

Predstavlja vektorski zbir svih spregova koji deluju na telo i zbir svih spregova proizvoljnih sila koje deluju na posmatrano telo u prostoru koji su posledica pomeranja sila u tačku O

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \vec{\mathfrak{M}}_S + \vec{\mathfrak{M}}_O = \vec{\mathfrak{M}}_S + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$$

Glavni moment proizvoljnog sistema sila i spregova u prostoru

$$\vec{\mathfrak{M}}_g = \vec{\mathfrak{M}}_O + \vec{\mathfrak{M}}_S = \vec{\mathfrak{M}}_O + \sum_{i=1}^{n} \vec{M}_O^{\vec{F}_i}$$

Vektorska jednačina može se napisati u analitičkom obliku

$$\mathfrak{M}_{gx} = \mathfrak{M}_{Sx} + \mathfrak{M}_{Ox} = \mathfrak{M}_{Ox} + \sum_{i=1}^{n} M_x^{\vec{F}_i}$$

$$\mathfrak{M}_{gy} = \mathfrak{M}_{Sy} + \mathfrak{M}_{Oy} = \mathfrak{M}_{Oy} + \sum_{i=1}^{n} M_y^{\vec{F}_i}$$

$$\mathfrak{M}_{gz} = \mathfrak{M}_{Sz} + \mathfrak{M}_{Oz} = \mathfrak{M}_{Oz} + \sum_{i=1}^{n} M_z^{\vec{F}_i}$$

Glavni vektor proizvoljnog sistema sila i spregova u prostoru

Intenzitet glavnog vektora

$$\mathfrak{M}_g = \sqrt{\mathfrak{M}_{gx}^2 + \mathfrak{M}_{gy}^2 + \mathfrak{M}_{gz}^2}$$

Kosinusi uglova ovog vektora i koordinatnih osa

$$\cos\alpha_{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}_{gx}}{\mathfrak{M}_g} \qquad \cos\beta_{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}_{gy}}{\mathfrak{M}_g} \qquad \cos\gamma_{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{M}_{gz}}{\mathfrak{M}_g}$$

Karakteristični oblici svođenja proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova

- Ukrst sila ili DINAMA
  $\vec{F}_g \neq 0 \qquad \vec{\mathfrak{M}}_g \neq 0 \qquad \alpha \neq 0 \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}$ Ugao između glavnog vektora i glavnog momenta
- Spreg sila
  $\vec{F}_g = 0 \qquad \vec{\mathfrak{M}}_g \neq 0$
- Rezultantu sistema
  $\vec{F}_g \neq 0 \qquad \vec{\mathfrak{M}}_g = 0$

RAVNOTEŽU

$\vec{F}_g = 0 \qquad \vec{\mathfrak{M}}_g = 0$

Uslovi ravnoteže proizvoljnog sistema sila i spregova

Potrebni i dovoljni uslovi ravnoteže slobodnog krutog tela na koji deluje proizvoljni sistem sila i spregova su:

1. Da je glavni vektor - rezultanta sistema sila jednak nuli
2. Da je glavni moment - rezultujući moment sistema jednak nuli

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \vec{\mathfrak{M}}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathfrak{M}}_i = 0$$

Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila i spregova

Ako sistem sila i spregova analiziramo u koordinatnom sistemu Oxyz uslovi ravnoteže se mogu napisati

$$\vec{F}_R = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \vec{\mathfrak{M}}_R = \vec{\mathfrak{M}}_1 + \vec{\mathfrak{M}}_2 + \ldots + \vec{\mathfrak{M}}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathfrak{M}}_i = 0$$

$$F_{xR} = F_{x1} + F_{x2} + \ldots + F_{xn} = \sum_{i=1}^{n} F_{xi} = 0 \qquad \mathfrak{M}_{xR} = \mathfrak{M}_{x1} + \mathfrak{M}_{x2} + \ldots + \mathfrak{M}_{xn} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{xi} = 0$$

$$F_{yR} = F_{y1} + F_{y2} + \ldots + F_{yn} = \sum_{i=1}^{n} F_{yi} = 0 \qquad \mathfrak{M}_{yR} = \mathfrak{M}_{y1} + \mathfrak{M}_{y2} + \ldots + \mathfrak{M}_{yn} = \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{yi} = 0$$

$$F_{zR} = F_{z1} + F_{z2} + \ldots + F_{zn} \quad \sum_{i=1}^{n} F_{zi} = 0 \qquad \mathfrak{M}_{zR} = \mathfrak{M}_{z1} + \mathfrak{M}_{z2} + \ldots + \mathfrak{M}_{zn} \quad \sum_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_{zi} = 0$$

Ravnoteža sistema krutih tela u prostoru

- Kretanje stema krutih tela u prostoru sprečavaju veze u tačkama A,B,C, D,E
- Na sistem deluje prostorni sistem sila i spregova
- Uslovi ravnoteže se mogu postaviti
- ***za sistem u celini***
- ***za svako telo ponaosob***

Ravnoteža sistema krutih tela u prostoru

- ***za sistem u celini***
- Sistem kao celinu treba osloboditi veza a njihovo dejstvo zameniti reakcijama veza
- Za sistem kao celinu se mogu postaviti uslovi ravnoteže

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0 \qquad \vec{\mathfrak{M}}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathfrak{M}}_i = 0$$

- Ove dve vektorske jednačine mogu se napisati kao šest jednačina – odnosno za svaku osu ponaosob

Ravnoteža sistema krutih tela u prostoru

- ***za svako telo ponaosob***
- Sistem kao celinu treba osloboditi veza a njihovo dejstvo zameniti reakcijama veza i njihov uticaj na svako telo
- Svako telo treba osloboditi veza sa drugim telima a unutrašnje sile zameniti reakcijama veza
- Za sistem kao celinu i za svako telo ponaosob se mogu postaviti uslovi ravnoteže

$$\vec{F}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$

$$\vec{\mathfrak{M}}_R = \sum_{i=1}^{n} \vec{\mathfrak{M}}_i = 0$$

- Ovako se dobija

6x(n+1) skalarnih jednačina

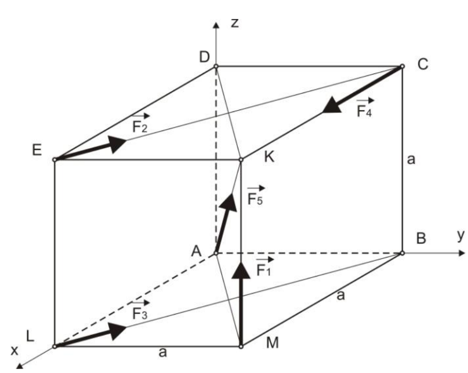
- za svako telo i za sistem po 6 jednačina

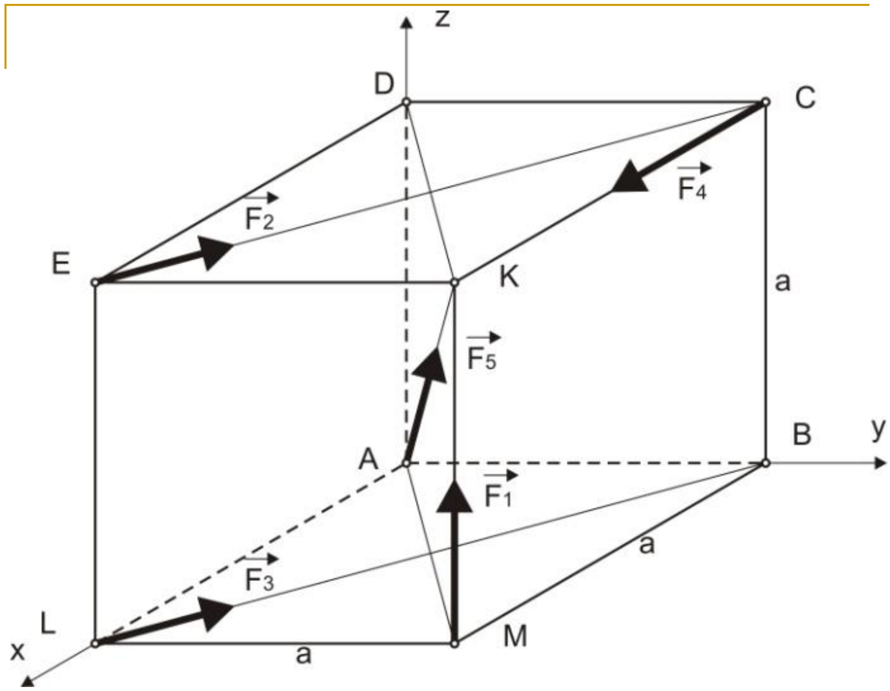
Rezime

- Sila je vektorska veličina koju definiše intenzitet, pravac, smer i napadna tačka
- F - intenzitet sile
- Projekcije sile u pravcima osa Dekartovog koordinatnog sistema
- Projekcije vektora sile na ose su **skalarne** veličine
  - $F_X = X$,
  - $F_Y = Y$,
  - $F_Z = Z$.
- Projekcije na ravni u Dekartovom koordinatnom sistemu
- Projekcije vektora sile na koordinatne ravni su **vektorske** veličine

Zadatak 1.

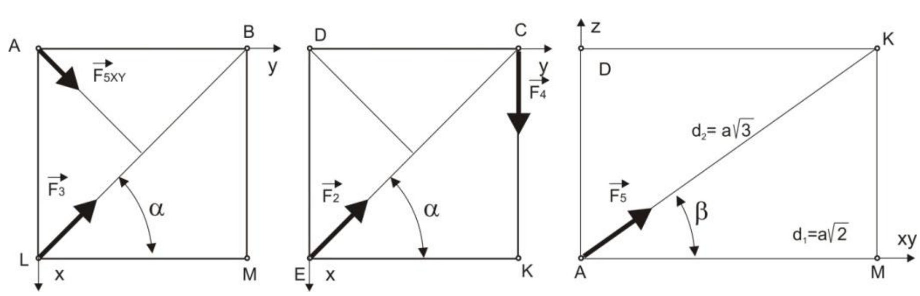
- Na pravougli paralelopiped strana a=b=c=10cm, dejstvuju sile čiji intenziteti su $F_1= F_2= F_3= F_4= F_5=10$ daN. Redukovati ovaj sistem u tačku A.





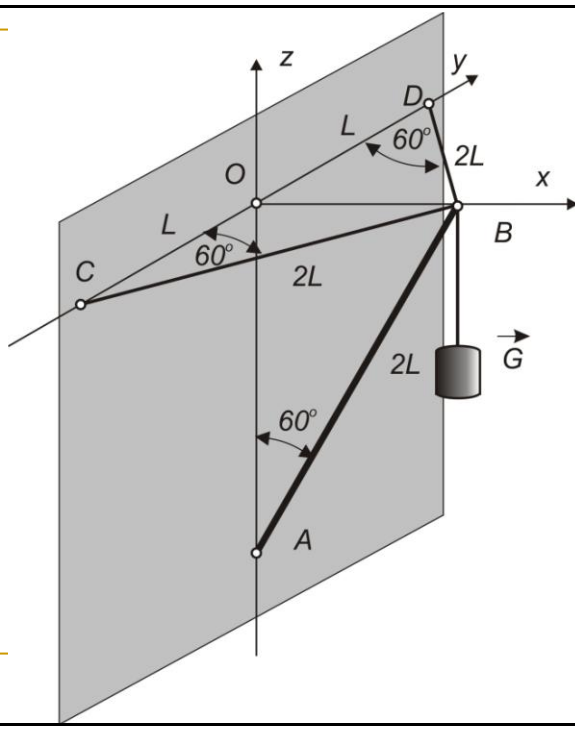
Zadatak 1

- preseci po ravnima i duž dijagonale

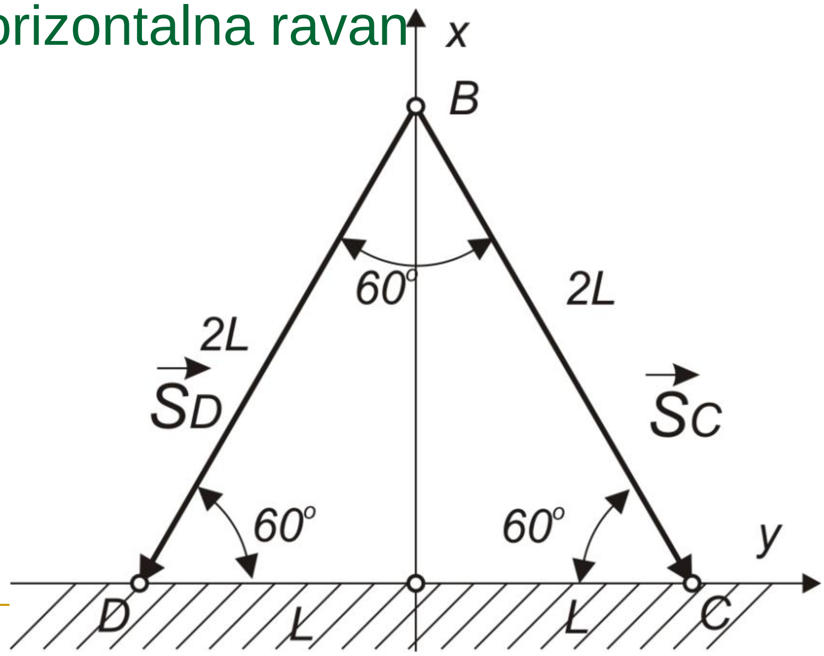


Zadatak 2.

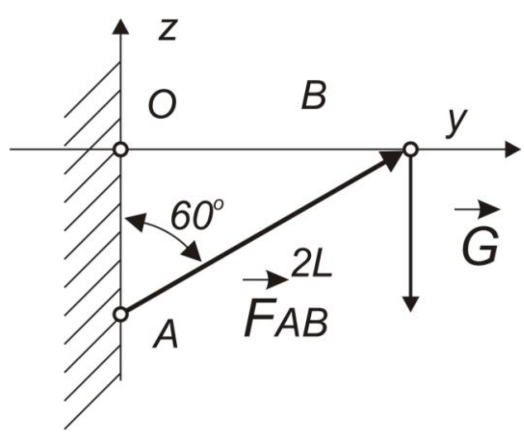
- Štap AB dužine 2L vezan je u tački A za vertikalni zid na rastojanju OA=l od tačke O. Kraj štapa B pridržavaju dva horizontalna zategnuta užeta DC=BD jednakih dužina vezani u tačkama C i D za zid na jednakom rastojanju od tačke O. OC=OD=0.5 BC.
- Odrediti silu u užadima i silu u štapu.



Horizontalna ravan



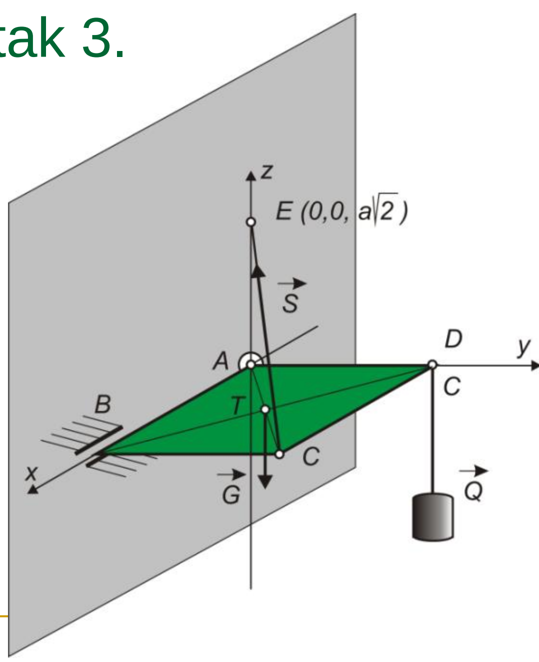
Vertikalna ravan



Zadatak 3.

- Homogena kvadratna ploča, težine G i stranice a, vezana je za postolje sfernim zglobom A i cilindričnim zglobom B, a u tački C pridržava se užetom CE. Odrediti sve reakcije veza ako su koordinate tačke E(0,0,1.41a) i Q=2G.

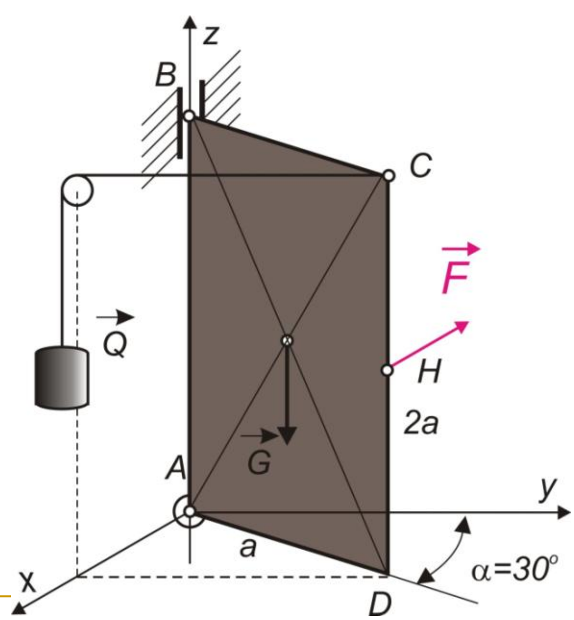
Zadatak 3.



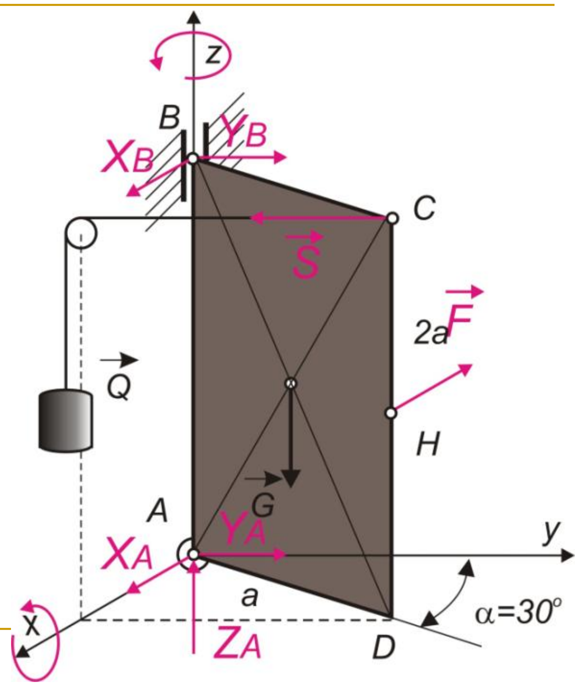
Zadatak 4.

- Vertikalno postavljena homogena vrata ABCD, težine G i stranica a i 2a, nalaze se u ravnotežnom položaju. U tački C vezano je uže i prebačeno preko kotura E, na čijem je kraju Q. Deo užeta CE je paralelan sa osom y. Vrata su u ravnoteži pod uglom a=30° u odnosu na vertikalnu ravan Ayz. Odrediti horizontalnu silu F koja deluje upravno na vrata u tački H, na sredini stranice CD, kao i reakcije veza. Uzeti Q=2G.

Zadatak 4.



Zadatak 4.



Zadatak 4. horizontalna ravan